UNIVERSITÄT
BERN

Physikalisches Institut

Praktikum für Studierende
der Physik und Astronomie

ANLEITUNG ZUM PHYSIKPRAKTIKUM

LEHRVERANSTALTUNG: W7121
Prof. Peter WURZ

FÜR STUDIERENDE IM 3. SEMESTER
MIT HAUPTFACH
PHYSIK ODER ASTRONOMIE

HS 2009

http://www.space.unibe.ch/physprak/

Redaktion:

Organisation und Regeln für das Praktikum / Peter Wurz, August 2008

Fehlerrechnung / Fritz Bühler, Februar 2002

Statistische Verteilungen / Michael Küppers, Mai 2002

Bestimmung der elektrischen Elementarladung nach Millikan / Karin Bamert, Dezember 2003

Photoelektrischer Effekt / Silvio Lorenzetti, Mai 2002

Radioaktivität / Silvio Lorenzetti, Mai 2002

Elektronik I: Passive Schaltungen / Peter Wurz (Karin Weiler), Dezember 2004

Elektronik II: Aktive Schaltungen / Peter Wurz (Renato Spahni), September 2004

Magnetische Hysteresis / Silvio Lorenzetti (Renato Spahni), September 2004

Einführung in LABVIEW / Reto Karrer & Urs Lauterburg, September 2006

Fraunhoferbeugung / Tra-Mi Ho (André Galli), September 2006

Akustik / Peter Wurz (Karin Weiler, André Galli), September 2006

Layout:

LaTeX -Gesamtdokument / Karin Weiler & André Galli, Juli 2007

LaTeX -Klasse PIPraktSkript.cls / Simon Müller & Renato Spahni, Februar 2005

Praktikums-Webseite mit Skripten und Versuchseinteilungen:

http://www.space.unibe.ch/physprak/

Inhaltsverzeichnis

1 Organisation und Regeln für das Praktikum **9**

1.1 Verbindliche Regeln für das Praktikum . . . 11
1.1.1 Organisation des Praktikums . . . 11
1.1.2 Testat . . . 11
1.1.3 Verschiedenes . . . 11
1.2 Bemerkungen zum Praktikum . . . 12
1.2.1 Praktikumsbericht . . . 12
1.3 Support . . . 12

2 Fehlerrechnung **15**

2.1 Einleitung . . . 17
2.1.1 Wieso messen wir? . . . 17
2.1.2 Voraussetzungen . . . 17
2.1.3 Grenzen der Messgenauigkeit und Zweck der Fehlerrechnung . . . 17
2.1.4 Direkte und indirekte Messungen . . . 17
2.2 Klassifizierung der Fehler . . . 18
2.2.1 Systematische und statistische Fehler . . . 18
2.2.2 Fehler der Beobachtungsgrössen und Fehler indirekter Messungen . . . 18
2.2.3 Absolutfehler und Relativfehler . . . 18
2.3 Statistischer Fehler der Beobachtungsgrösse . . . 19
2.3.1 Streuen der Messwerte . . . 19
2.3.2 Der Durchschnitt als Schätzwert des wahren Wertes der Messgrösse . . . 19
2.3.3 Die Standardabweichung als Mass für die Streuung der Messwerte . . . 19
2.3.4 „Fehler des Mittelwertes“ . . . 20
2.3.5 Verwendung von Taschenrechnern . . . 21
2.3.6 Darstellung der Messergebnisse . . . 21
2.4 Fortpflanzung der statistischen Fehler . . . 22
2.4.1 Problemstellung bei indirekten Messungen . . . 22
2.4.2 Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauss . . . 22
2.5 Systematische Fehler . . . 27
2.5.1 Systematische Fehler der Beobachtungsgrösse . . . 27
2.5.2 Fortpflanzung systematischer Fehler . . . 28
2.5.3 Darstellung . . . 28
2.6 Zusammenstellung der Formeln . . . 28
2.6.1 Direkte Beobachtung . . . 28
2.6.2 Indirekte Beobachtung: Fehler zusammengesetzter Grössen . . . 29

3 Statistische Verteilungen **31**
3.1 Messungen und Fehler . . . 33
3.2 Mittelwert und Varianz . . . 33
3.3 Klassenbildung und Häufigkeit . . . 34
3.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . 34
3.4.1 Allgemeines . . . 34
3.4.2 Normalverteilung . . . 35
3.4.3 Binomialverteilung . . . 36
3.4.4 Poissonverteilung . . . 37
3.5 Zentraler Grenzwertsatz. Verteilung des Mittelwerts . . . 38
3.6 Lineare Regression . . . 40

4 Bestimmung der elektrischen Elementarladung nach Millikan **45**
4.1 Einleitung . . . 47
4.2 Beschreibung des Millikanversuches . . . 47
4.3 Bewegung elektrisch geladener Öltröpfchen . . . 48
4.4 Messmethoden . . . 49
4.4.1 Methode I . . . 49
4.4.2 Methode II . . . 50
4.4.3 Methode III . . . 50
4.4.4 Ergänzung . . . 51
4.4.5 Fehlerbetrachtungen . . . 51
4.5 Aufgabe . . . 51

5 Photoelektrischer Effekt **55**
5.1 Ziel . . . 57
5.2 Theorie . . . 57
5.3 Versuchsaufbau . . . 58
5.3.1 Prinzip . . . 58
5.3.2 Messung sehr kleiner Ströme . . . 58
5.3.3 Material . . . 59
5.4 Experiment . . . 59
5.4.1 Vorgehen . . . 59
5.5 Auswertung . . . 60

6 Radioaktivität **63**
6.1 Theorie . . . 65
6.1.1 Aktivität, Zählratenmessung, Poissonverteilung . . . 65
6.1.2 Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Materie . . . 65
6.1.3 Nachweis der Kernstrahlung mit Hilfe eines Geiger-Müller-Zählrohres . . . 67
6.2 Aufgaben . . . 68
6.2.1 1. Halbtag . . . 68
6.2.2 2. Halbtag . . . 68
6.3 Auszüge aus der Isotopentabelle . . . 69
6.4 Massenabsorptionskoeffizient von Blei . . . 70
6.5 χ^2-Verteilung . . . 71

6.6 Einheiten der Radioaktivität und des Strahlenschutzes . . . 71
6.6.1 Aktivität . . . 71
6.6.2 Absorbierte Dosis . . . 71
6.6.3 Ionendosis . . . 71
6.6.4 Äquivalentdosis . . . 72
6.6.5 Effektive Dosis . . . 72
6.7 Durch Strahlung verursachte biologische Schäden . . . 72
6.8 Strahlenschutz und natürliche Strahlenbelastung . . . 72

7 Elektronik I: Passive Schaltungen 75
7.1 Theorie . . . 77
7.1.1 Der elektrische Widerstand . . . 77
7.1.2 Der Kondensator . . . 77
7.1.3 Die Spule . . . 78
7.1.4 Komplexe Darstellung von Wechselspannungen und -strömen . . . 78
7.1.5 Rechenregeln für komplexe Zahlen . . . 79
7.1.6 Kapazität im Wechselstromkreis . . . 80
7.1.7 Induktivität im Wechselstromkreis . . . 80
7.1.8 Widerstand im Wechselstromkreis . . . 81
7.1.9 Verstärkung im Wechselstromkreis . . . 82
7.1.10 Anwendung auf Grundschaltungen . . . 82
7.2 Experiment . . . 93
7.2.1 Der Frequenzgenerator (FG) . . . 93
7.2.2 Das Kathodenstrahloszilloskop (KO) . . . 94
7.2.3 Praktische Aufgaben zum Tiefpaß . . . 94
7.2.4 Aufgaben zum Hochpaß . . . 99
7.2.5 Bandpaß . . . 100
7.2.6 Schwingkreis . . . 101

8 Elektronik II: Aktive Schaltungen 103
8.1 Einleitung . . . 105
8.2 Theorie . . . 105
8.2.1 Dioden . . . 106
8.2.2 Der Transistor . . . 107
8.2.3 Der Operationsverstärker . . . 108
8.2.4 Der Logarithmierer . . . 110
8.3 Experiment . . . 112
8.3.1 Testschaltungen . . . 112
8.3.2 Dimensionieren Sie einen Logarithmierer . . . 112
8.3.3 Aufnahme der Kennlinie des Logarithmierers . . . 113
8.3.4 Spitzenwertgleichrichter . . . 114
8.3.5 Hochpaß . . . 114
8.3.6 Abschlußmessung . . . 114
8.3.7 Zusatz . . . 115

9 Magnetische Hysteresis **117**
9.1 Grundlagen . . . 119
9.2 Aufgabenstellung . . . 121
9.3 Messung der Magnetisierung . . . 121
9.3.1 Entmagnetisierung der Ringkerne . . . 121
9.3.2 Messschaltung für den Magnetisierungszyklus . . . 122
9.3.3 Messung der Neukurve . . . 123
9.3.4 Messung der Hystereseschleife . . . 125
9.4 Auswertung . . . 126

10 Einführung in LABVIEW **129**
10.1 Einleitung . . . 131
10.2 Was ist LabVIEW? . . . 131
10.3 Aufbau von LabVIEW . . . 131
10.3.1 Front Panel . . . 131
10.3.2 Block Diagram . . . 132
10.3.3 Connector und Icon . . . 132
10.4 Wie startet man LabVIEW und wie geht man mit den Macs um? . . . 132
10.5 Richtlinien zum Gebrauch der Macs . . . 132
10.6 Beispiele . . . 132
10.6.1 Allgemeines . . . 132
10.6.2 Ein- und Ausgabe . . . 134
10.6.3 Zufallszahlen . . . 135
10.6.4 Kontinuierliche Generierung von Zufallszahlen . . . 136
10.6.5 Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung . . . 139
10.6.6 Histogramm . . . 140
10.7 Hilfefunktionen und Debugging . . . 142
10.8 Datenerfassung mit LabVIEW . . . 142
10.8.1 Immediate Nonbuffered Acquisition . . . 143
10.8.2 Timed Buffered Acquisition . . . 145
10.8.3 Timed Buffered Continuous Acquisition . . . 145
10.9 Aufgabe: Pulsmessung über Lichtabsorption . . . 146
10.9.1 Idee und Aufgabe . . . 146
10.9.2 Anleitung zur Programmierung . . . 147

11 Fraunhoferbeugung **153**
11.1 Einleitung . . . 155
11.1.1 Wellenoptik . . . 155
11.1.2 Überlegungen zur Grenze der geometrischen Optik . . . 155
11.2 Interferenz . . . 157
11.3 Beugung . . . 158
11.3.1 Fraunhofer Beugung . . . 159
11.4 Versuchsanordnung und Aufgabenstellung . . . 163
11.4.1 Versuchsanordnung . . . 163
11.4.2 Aufgabenstellung . . . 163
11.5 Anleitung zum Versuch . . . 164
11.5.1 Vorbereitung des Versuchs . . . 164

11.5.2 Bedienungsanleitung für das Programm 165
11.6 Schlussdiskussion 171

12 Akustik **175**
12.1 Einführung in die Akustik 177
12.2 Die menschliche Schallwahrnehmung 181
12.2.1 Die Schallwahrnehmung mit dem Ohr 181
12.2.2 Das Ohr 184
12.3 Die Fouriertransformation 185
12.3.1 Die diskrete Fouriertransformation 186
12.3.2 Datenfensterfunktionen 188
12.4 Der Gong 190
12.5 Durchführung der Messungen 190
12.5.1 Inventarliste 190
12.5.2 Einleitung 190
12.5.3 Spielprogramm 191
12.5.4 Messprogramm 193
12.5.5 Analyseprogramm 193
12.5.6 Detailierte Auswertung 196

Abbildungen **197**

Kapitel 1

Organisation und Regeln für das Praktikum

1.1 Verbindliche Regeln für das Praktikum

1.1.1 Organisation des Praktikums

- Das Praktikum wird in Gruppen an jeweils einem Nachmittag pro Woche durchgeführt. Zwei Studenten/-innen arbeiten gemeinsam an einem Versuch.
- Die Studierenden bleiben ein Semester lang in der gleichen Praktikumsgruppe. Die Assistierenden führen dauernd Kontrolle über die ausgeführten Versuche, die Präsenz und die Anerkennung der Versuchsberichte aller Studierenden ihrer Gruppe.
- Das Praktikum findet wöchentlich statt und beinhaltet 3 Stunden Arbeit und 15 Minuten Pause. Die Blockzeiten sind einzuhalten.
- Das Praktikum soll in der ersten oder zweiten Semesterwoche beginnen. Die Assistierenden können nach Bedarf für einzelne Versuche zwei Praktikumsnachmittage verwenden.
- Das Praktikum endet nachdem alle Versuche ausgeführt sind.

Wichtig: Alle Ausnahmen von diesen Regeln müssen von einem Leiter des Praktikums bewilligt werden bevor die Studierenden informiert werden.

1.1.2 Testat

- Die Studierenden führen jeden Versuch durch.
- Jeder Praktikumsversuch inklusive des Berichts wird von den Assistierenden beurteilt. Für ein positives Testat müssen alle Versuche positiv durchgeführt werden. Die Testatnote ist der Mittelwert über alle Einzelnoten.

1.1.3 Verschiedenes

- Ein Versuch gilt als durchgeführt wenn das entsprechende Experiment am Praktikumsnachmittag durchgeführt, ein Praktikumsbericht erstellt, und allfällige nachträgliche Ergänzungen des Berichts gemacht worden sind.
- Die Dispensation von Versuchen aufgrund von Vorkenntnissen ist nach Absprache mit dem Praktikumsleiter möglich.
- Wer allenfalls einen Versuch nicht mit seiner Gruppe durchführen kann, orientiert frühzeitig die Assistentin oder den Assistenten, damit die Ausführung des Experiments mit einer anderen Gruppe organisiert werden kann.
- Bitte Absenzen so früh wie möglich mitteilen, damit ein Ersatztermin gefunden werden kann. Absenzen sind nur in gut begründeten Fällen erlaubt.
- Alle Versuche sind zuhause vorzubereiten. Die Einleitung im Praktikumsheft ist dann bereits gemacht.

Die Leiter des Praktikums.

1.2 Bemerkungen zum Praktikum

1.2.1 Praktikumsbericht

- Ziel: Knappe, aber präzise und vollständige Dokumentation des Versuches und dessen Auswertung. Anhand eines Praktikumsberichts sollten die Versuche reproduziert werden können.
- Alle Informationen gehören ins Praktikumsheft. Es dürfen keine losen Blätter oder Ringordner verwendet werden.
- Grafiken sind auf mm-Papier oder als Computergrafik mit korrekter Achsenbeschriftung zu erstellen.
- Typische Gliederung
  - Titel (mit Autoren und Zeit)
  - Einleitung
    - Ziel des Versuchs
    - Literatur
    - Theorie (Zusammenfassung und Zusammenstellung der für die Auswertung benötigten Formeln)
    - Theoretische Aufgaben
    - Fehlerrechnung
  - Versuchsaufbau (Skizze, Gerätenummern,...)
  - Messungen: Alle Messwerte in übersichtlichen Tabellen mit Mittelwerten und Fehlerangaben
  - Diskussion
    - Kommentare
    - Vergleich der Messwerte mit Theorie und Literaturwerten
    - Hinweis auf möglich Fehlerquellen (besonders systematische Fehler)
    - Schwierigkeiten bei der Messung
    - ...
  - Grafische Darstellungen

1.3 Support

Das Physikpraktikum für die unterschiedlichen Studiengänge findet im U2 des Altbaus des Gebäudes der Exakten Wissenschaften in den Räumen 801A - C, 701A - C, 811 - 814 und 819 statt. Für den Support des Praktikums d.h. Organisation, Bereitstellen der Versuche, Reparaturen etc. sind Herr F. Marbacher (Tel. 37 85) und in Vertretung Herr U. Lauterburg (Tel. 44 88) zuständig.
Weil die zur Verfügung stehenden Räumlichkeiten für die Praktika sehr beschränkt sind, ist ein tägliches Umstellen und Neueinrichten der Versuchsanordnungen notwendig. Damit der Arbeitsaufwand in einem vernünftigen Rahmen bleibt, ist das Support-Personal auf die Mithilfe der beteiligten AssistentInnen und StudentInnen angewiesen.

Wir hoffen auf eine gute Zusammenarbeit im Sinne aller Beteiligten.

Urs Lauterburg, Februar 2008

Tabelle 1.1: Anzahl Versuchsanordnungen und Parallelgruppen HS2009

Versuch	Anzahl	Mögliche Gruppen	Fachrichtung(en)*
Akustik	4	1	HF
Beugung	14	3	MED, VET
Elektronik I + II	8	2	HF
Fraunhoferbeugung	8	2	HF
Hydrodynamik	18	3	MED, VET
LabVIEW	8	2	HF
Leitercharakteristiken	14	3	VET
Linsen	14	3	MED, VET
Magnetische Hysteresis	8	2	HF
Millikan	8	3	HF
Photoelektrischer Effekt	8	2	HF
Radioaktivität	14	3	MED, VET

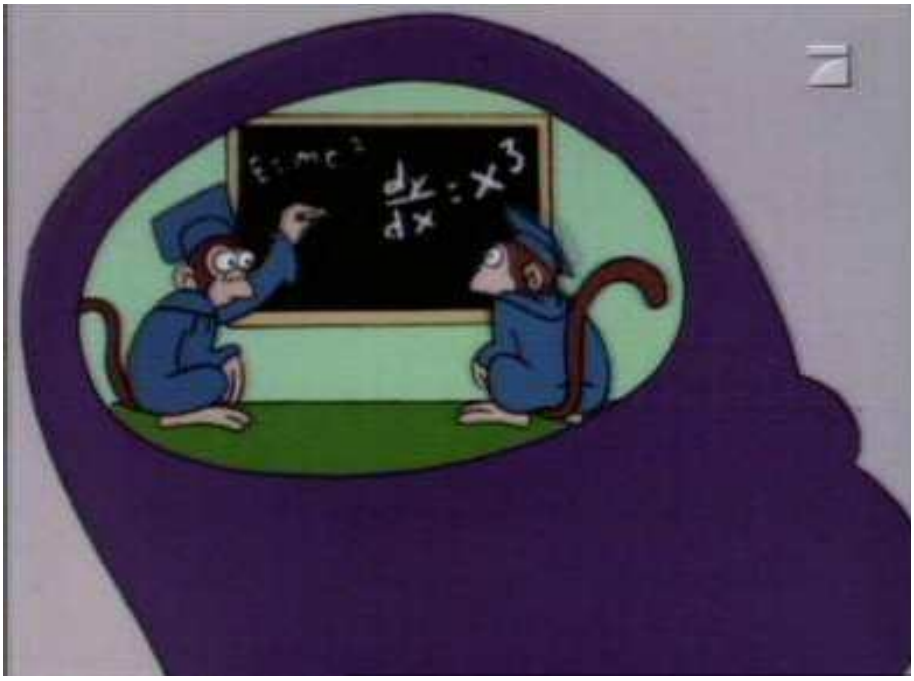
* HF: Physik als Hauptfach, MED: Medizin, VET Veterinärmedizin

Exakte Wissenschaften
UNIVERSITÄT BERN
801
701
C B A
2. Untergeschoss
819
814
813
812
811
B 079
Hörraum
18 Plätze
B 077
Hörraum
30 Plätze
B 078
Hörraum
32 Plätze
B 116
Hörraum
36 Plätze
B 001
Hörraum
32 Plätze
B 005
Hörsaal
116 Plätze
B 006
Hörsaal
112 Plätze
B 007
Hörsaal
109 Plätze
0 5 10 20

Kapitel 2

Fehlerrechnung

Für den ständigen Gebrauch im Praktikum



2.1 Einleitung

2.1.1 Wieso messen wir?

Die Physik will die Natur mit mathematischen Mitteln möglichst genau und vollständig beschreiben. Aus gemessenen Daten sollen Theorien (physikalische Gesetze) entwickelt werden. Diese Gesetze sollen durch verschiedene Messungen immer wieder überprüft werden. Das Messen und die Interpretation von Messungen sind zentrale Punkte der Physik.

2.1.2 Voraussetzungen

Beim Messen physikalischer Grössen nehmen wir immer gewisse Voraussetzungen als gegeben an. Wichtige Voraussetzungen, die stillschweigend als richtig angenommen werden, sind:

- Die physikalischen Gesetze gelten global und zu allen Zeiten.
- Es gibt Messeinheiten, die weder vom Ort noch von der Zeit abhängig sind.
- Es existiert ein wahrer und eindeutiger Wert für jede Messgrösse.

Mit derartigen Fragen und dem Problem, wie weit der Mensch überhaupt fähig ist, Dinge wirklich sicher wahrzunehmen, beschäftigt sich die Erkenntnistheorie, ein Zweig der Philosophie.

2.1.3 Grenzen der Messgenauigkeit und Zweck der Fehlerrechnung

Braucht auch ein guter Physiker, der keine Fehler macht, die Fehlerrechnung zu kennen? Einerseits hat wohl sogar Albert Einstein hin und wieder einen Fehler gemacht. Anderseits wird hier das Wort „Fehler“ in einem ganz anderen Sinn verwendet. „Fehler“ steht hier für „geschätzte Abweichung vom wahren Wert“. Den wahren Wert kennen wir nie genau. Die Fehlerrechnung soll ein Mass für die zu erwartende Abweichung der Messergebnisse vom „wahren Wert“ liefern. Die Abweichungen sind eine Folge der beschränkten Genauigkeit jeder Messung. Die Fehlerrechnung gibt auf folgende Fragen eine Antwort:

- Entspricht ein Resultat innerhalb der Fehlergrenzen dem überprüften Gesetz?
- Welche Messfehler liefern den Hauptbeitrag zum Gesamtfehler?
- Wie muss die Methode verbessert werden, wenn der Fehler verkleinert werden soll?

Der Ausdruck „Fehlerrechnung“ ist zwar allgemein üblich, aber teilweise irreführend: Einerseits geht es nicht um Fehler im üblichen Sinn, anderseits findet man mit Rechnen allein die Antwort auf die oben aufgeführten Fragen nicht.

2.1.4 Direkte und indirekte Messungen

Längen, Zeiten, Kräfte und einiges mehr können wir direkt an relativ einfachen Messgeräten ablesen. Solche Messungen nennen wir direkte Messungen. Wollen wir die mittlere Fallgeschwindigkeit eines Apfels vom Ast auf den Boden bestimmen, müssen wir die Höhe des Astes und die Fallzeit messen und die mittlere Fallgeschwindigkeit aus den Messergebnissen ausrechnen. Die Bestimmung der Fallgeschwindigkeit ist eine indirekte Messung. Mit direkten Messungen

ermittelte Grössen heissen auch Beobachtungsgrössen. Beobachtungsgrössen müssen immer unmittelbar und ohne vorherige Umrechnung im Protokoll notiert werden, damit die wichtige Forderung nach Reproduzierbarkeit eines Experiments erfüllt werden kann. Würden nur die Resultate indirekter Messungen notiert, wäre es später unmöglich, allfällige Rechen- oder Programmierfehler zu finden! Schon die Umrechnung einer gemessenen Frequenz auf die Periode bedeutet, dass diese nur indirekt gemessen wurde.

2.2 Klassifizierung der Fehler

2.2.1 Systematische und statistische Fehler

Beispiel: Bestimmung der Energie eines schwingenden Pendels durch Messung der Amplitude des ersten Ausschlags, den das Pendel nach dem Anstossen ausführt. Wir machen zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Fehlern:
Zum einen werden wir die Amplitude nie ganz genau ablesen können. Wiederholen wir die Messung, werden wir jedesmal ein etwas anderes Resultat erhalten. Je häufiger wir die Messung wiederholen, desto genauere Aussagen über die Amplitude können wir machen. Zum andern lässt sich nicht vermeiden, dass nach dem Anstossen das Pendel bereits während des ersten Ausschlags einen Teil seiner kinetischen Energie durch Luftreibung verliert. Dieser Einfluss wird nicht kleiner, auch wenn wir noch so oft messen. Die erste Art Fehler nennen wir statistische Fehler, die zweite systematische Fehler.

Statistische Fehler

Statistische Fehler sind auf eine Vielzahl kleiner Störeinflüsse zurückzuführen, die die Messergebnisse in von Messung zu Messung wechselnder Weise verändern. Sie lassen sich mit Methoden der Statistik abschätzen und durch Vergrösserung der Anzahl Messungen reduzieren (vgl. Abschnitt 2.3 und 2.4).

Systematische Fehler

Systematische Fehler sind Abweichungen, die die Ergebnisse aller Messungen einer Grösse, die mit einer bestimmten Messmethode ausgeführt werden, im gleichen Sinn verfälschen. Sie sind schwieriger zu beurteilen. Oft sind sie nur schwer zu erkennen. Zu ihrer Abschätzung gibt es keine allgemeinen Regeln, und ihre Ursachen sind vielfältig (vgl. Abschnitt 2.5).

2.2.2 Fehler der Beobachtungsgrössen und Fehler indirekter Messungen

Wie sich die statistischen Fehler der direkten Messungen auf den Fehler der daraus berechneten indirekten Messung auswirken, beschreibt das Fehlerfortpflanzungsgesetz (vgl. Abschnitt 2.4).

2.2.3 Absolutfehler und Relativfehler

Ein Fehler kann in den Einheiten der Messgrösse („Absolutfehler“) oder als (dimensionsloser) Bruchteil des der gemessenen Grösse („Relativfehler“) angegeben werden. Bei der Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes erweist sich die Rechnung mit relativen Fehlern oft als einfacher.

2.3 Statistischer Fehler der Beobachtungsgrösse

2.3.1 Streuen der Messwerte

Beispiel:
Wir bestimmen die Tourenzahl eines Grammophontellers, wenn 33 RPM eingestellt sind. Mit einer Stoppuhr, welche Hundertstelsekunden anzeigt, messen wir 20 Mal die Zeit, in welcher der Teller eine Umdrehung macht:

Laufnummern (1...20) und gemessene Zeiten (in s)

1	1.77	6	1.82	11	1.78	16	1.85
2	1.85	7	1.76	12	1.81	17	1.72
3	1.91	8	1.86	13	1.73	18	1.84
4	1.79	9	1.85	14	1.81	19	1.82
5	1.79	10	1.81	15	1.84	20	1.93

Vermutlich läuft das Grammophon regelmässig, aber wir starten und stoppen die Zeit nur auf etwas weniger als eine Zehntelsekunde genau, weswegen wir fast jedesmal einen anderen Wert ablesen. Als zusammenfassendes Resultat unserer zwanzig Messungen sollten wir aber einen Schätzwert für die wahre Umlaufszeit angeben. Mit einer weiteren Zahl sollte das Streuen der Messwerte quantitativ beschreiben werden.

2.3.2 Der Durchschnitt als Schätzwert des wahren Wertes der Messgrösse

Unsere Schätzung der Messgrösse (z. B. „Umlaufszeit des Grammophontellers“) sollte „möglichst nahe“ beim unbekannten wahren Wert liegen. Der am häufigsten gebrauchte Schätzwert ist das arithmetische Mittel der Messwerte, der sogenannte „Durchschnitt“.

Durchschnitt $$\bar{x} := \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

x_i: Werte der Einzelmessungen
N: Anzahl der Messungen oder „Umfang der Stichprobe“

Je grösser N, desto näher wird $\bar{x}$ im Allgemeinen beim wahren Wert liegen. Je mehr Messungen wir also ausführen, desto besser wird unsere Schätzung. Bedingung: Es dürfen keine systematischen Fehler auftreten (siehe Abschnitt 2.5).

Der Durchschnitt ist nur eine von mehreren möglichen Definitionen eines Mittelwerts. Andere Beispiele, die aber hier nicht definiert werden: Median oder Zentralwert, häufigster Wert, usw.

2.3.3 Die Standardabweichung als Mass für die Streuung der Messwerte

Definition der Standardabweichung

Als Mass für die Streuung der einzelnen Messwerte wird am Häufigsten die sogenannte Standardabweichung verwendet:

Standardabweichung $\quad s_x := \sqrt{\dfrac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$

x_i: Werte der Einzelmessungen
$\bar{x}$: Durchschnitt der Stichprobe
N: Anzahl der Messungen oder „Umfang der Stichprobe“

Ausser von der Standardabweichung s_x spricht man auch von ihrem Quadrat, der Varianz s_x^2. Die Standardabweichung ist nicht vom Umfang der Stichprobe abhängig, wenn alle Messungen nach der gleichen Methode ausgeführt werden. Die Standardabweichung wird etwa auch „Fehler der Einzelmessung“ genannt. Als Absolutfehler hat sie dieselbe Einheit wie die Messwerte.

Aufgabe 1:
Berechne den Durchschnitt und die Standardabweichung für das Beispiel in 2.3.1.
[Lösung: $\bar{x} = 1.817$ s, $s_x = 0.053$ s]

Aufgabe 2:
Zeige, dass die Summe $\sum(x_i - c)^2$ am kleinsten wird für $c = \bar{x}$. Was bedeutet das?

Spezialfälle

Es gibt Fälle, wo die Standardabweichung offensichtlich kein vernünftiges Resultat für die Streuung der Messwerte liefert.

Beispiele:

- Der Zeiger der Stoppuhr springt jeweils um eine ganze Zehntelsekunde.
- Digitale Messgeräte zeigen oft nur so viele Stellen an, wie ihrer Eichgenauigkeit entspricht.

Der Raster der möglichen Anzeigewerte ist bei diesen Geräten so grob, dass kleine Schwankungen der Messwerte gar nicht bemerkt werden. Übrigens kann meistens aus der Feinheit des Rasters ungefähr auf die Genauigkeit eines Gerätes geschlossen werden.

2.3.4 „Fehler des Mittelwertes“

Wir haben den Durchschnitt einer Stichprobe bestimmt. Können wir voraussagen, wie stark die Durchschnitte vieler weiterer Stichproben gleichen Umfangs streuen werden?
Die Streuung dieser Durchschnitte wäre ein Mass für die zu erwartende Abweichung unseres Durchschnitts vom wahren Wert, d. h. für den Fehler unseres mit Hilfe einer Stichprobe bestimmten Durchschnitts. Wir erwarten, dass der Durchschnitt aus mehreren Messungen tendenziell weniger vom - unbekannten - wahren Wert abweicht als eine einzelne Messung; das ist auch der Grund, warum wir eine Grösse mehrmals messen müssen.

Durchschnitte aus je N Messungen streuen um $1/\sqrt{N}$ weniger stark als die Einzelmessungen. Wir schreiben also:

"Fehler des Mittelwerts" $\quad s_{\bar{x}} := \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{N}}\, s_x$

Aufgabe 3:
Berechne den „Fehler des Mittelwerts" im Beispiel in Unterabschnitt 2.3.1!
[Lösung: $s_{\bar{x}} = 0.0118$ s]

2.3.5 Verwendung von Taschenrechnern

Fast alle Taschenrechner verfügen über einen Satz an eingebauten Statistikprogrammen. Mit diesen lassen sich Standardabweichung und Mittelwert bequem berechnen. Es lohnt sich, in der Anleitung nachzusehen und z. B. die Aufgabe 1 durchzurechnen, um zu sehen, ob der Rechner wirklich unsere Formel für s_x verwendet!

Ein programmierbarer Taschenrechner erlaubt oft, die gesamte Fehlerrechnung stark zu vereinfachen. Probieren Sie es mal!

2.3.6 Darstellung der Messergebnisse

Als Resultat einer mehrmaligen Messung der Grösse x werden der Durchschnitt $\bar{x}$ der Stichprobe sowie dessen für weitere Messungen vorausgesagte Streuung $s_{\bar{x}}$, genannt „Fehler des Mittelwerts", angegeben.
Der Fehler lässt sich meistens auf ein bis zwei signifikante Stellen abschätzen. Mittelwert und Fehler sollen mit gleich vielen Dezimalstellen geschrieben werden.

Erklärung:
Die folgenden Ausdrücke haben „zwei signifikante Stellen": 0.0012, 0.012, 0.12, 1.2, 12.

Sowohl zum Durchschnitt („Mittelwert") als auch zum Fehler des Mittelwerts gehören Einheiten. Die Einheit ist für beide dieselbe wie für die Messgrösse.

Beispiel:
Umlaufszeit des Plattentellers: $\quad T = (1.817 \pm 0.012)$ s
Die Streuung der Mittelwerte kann auch als relativer Fehler angegeben werden:

$T = 1.817$ s ± 0.65 %

Bemerkung:
Als „Messung" können wir, statt jede *einzelne* der Beobachtungen, auch die Gruppe von N Beobachtungen ansehen, die das Resultat $\bar{T}$ für die Grösse T liefert. Darum ist es sinnvoll, als Fehler des Resultats immer den „Fehler des Mittelwerts" anzugeben.

2.4 Fortpflanzung der statistischen Fehler

2.4.1 Problemstellung bei indirekten Messungen

In den wenigsten Fällen wird in einem Experiment die gesuchte Grösse unmittelbar gemessen werden können. Meistens müssen wir verschiedene Grössen messen und sie mit Hilfe mehr oder weniger komplizierter Formeln verknüpfen, um das gesuchte Resultat zu erhalten. Wie wirken sich nun die Streuungen der direkten Messungen einzelner Grössen auf das Resultat der indirekten Messung aus?

2.4.2 Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauss

Die folgenden Überlegungen helfen, das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz zu verstehen.

Nur *eine* unabhängige Grösse

Wir haben in einer Serie von N Messungen einer Beobachtungsgrösse den Mittelwert $\bar{x}$ und seinen Fehler $s_{\bar{x}}$ bestimmt. Es stellt sich nun die Frage, welchen Wert wir für eine von x abhängige Grösse $f(x)$ (indirekte Messung) angeben sollen.

Wir könnten natürlich die $f_i := f(x_i)$ rechnen und den Mittelwert $\bar{f}$ dieser N Funktionswerte angeben. $s_{\bar{f}}$, der Fehler von $\bar{f}$, könnte dann aus den f_i bestimmt werden.

Gesucht ist aber eine Methode, die es erlaubt, $\bar{f}$ und $s_{\bar{f}}$ näherungsweise direkt aus $\bar{x}$ und $s_{\bar{x}}$ zu berechnen. Man kennt nämlich nicht immer alle Messwerte x_i, aus welchen $\bar{x}$ und $s_{\bar{x}}$ berechnet worden sind.

Die ersten zwei Terme der Entwicklung von $f(x)$ in eine Taylorreihe erfüllen für kleine dx die Näherung (siehe Abb. 2.4.2):

$$f(x + dx) \cong f(x) + f'(x)\, dx \tag{2.1}$$

Das heisst: Sind an der Stelle x die Werte der Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitung $f'(x) \equiv df/dx$ bekannt, so lässt sich der Funktionswert an einer Nachbarstelle $x + dx$ nach obiger Formel annähern. Die Näherung wird umso besser, je kleiner die Abstände dx sind.

Da wir (hoffentlich!) in den meisten Fällen nicht mit grossen Fehlern zu arbeiten haben werden, kann diese Formel bei unserem Problem helfen:

Mit den Abkürzungen $\quad dx_i := x_i - \bar{x} \quad$ und $\quad df_i := \left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} dx_i$

gilt nach Taylor: $\quad f(x_i) \cong f(\bar{x}) + df_i$

Näherung für $f(\bar{x})$:

Bei der Mittelbildung $\bar{f} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ verschwindet die Summe der Abweichungen dx_i.

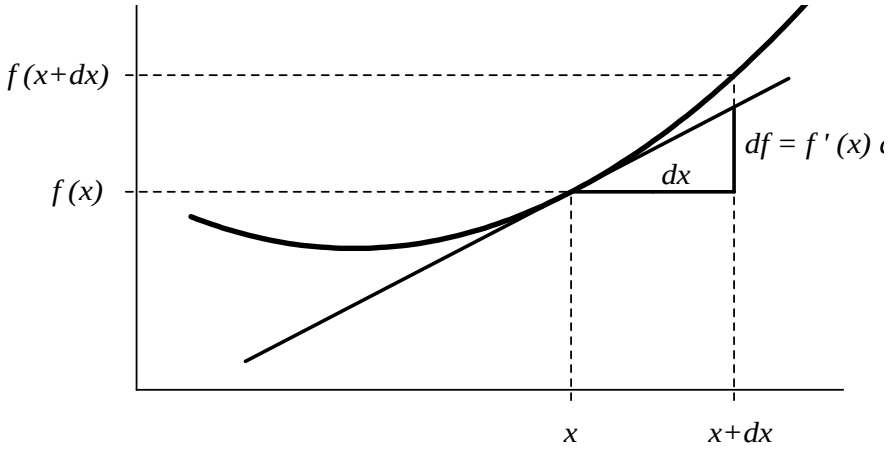


Abbildung 2.1: Erste Näherung nach Taylor

Deshalb gilt:

$$\bar{f} \cong f(\bar{x}) \tag{2.2}$$

Näherung für $s_{\bar{f}}$:

$$s_{\bar{f}}^2 = \frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(f_i - \bar{f})^2 \cong \frac{1}{N}\frac{1}{N-1}\left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}(dx_i)^2 \tag{2.3}$$

Das heisst:

$$s_{\bar{f}}^2 \cong \left(\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}\right)^2 s_{\bar{x}}^2 \quad \text{oder} \quad s_{\bar{f}} \cong \left|\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}}\right| s_{\bar{x}} \tag{2.4}$$

Wird einmal nur der *zahlenmässige* Wert von $s_{\bar{f}}$ gesucht, kann die Formel von Taylor wie folgt verwendet werden ($s_{\bar{x}}$ anstelle von dx setzen):

$$s_{\bar{f}} \cong |f(\bar{x} + s_{\bar{x}}) - f(\bar{x})| \tag{2.5}$$

Hat man einen programmierbaren Taschenrechner, braucht man deshalb nur die Formel für $f(x)$ einzugeben; df/dx braucht dann gar nicht ausgerechnet zu werden!

Anwendung auf ausgewählte Funktionen $f(x)$

$$f(x) = ax \qquad (a = \text{const}) \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} = a$$

$$s_{\bar{f}}^2 \cong a^2 s_{\bar{x}}^2 \qquad \text{oder} \qquad s_{\bar{f}} \cong |a|\, s_{\bar{x}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} = -\frac{1}{\bar{x}^2}$$

$$s_{\bar{f}}^2 \cong \frac{1}{\bar{x}^4}\, s_{\bar{x}}^2 \qquad \text{oder} \qquad s_{\bar{f}} \cong \frac{1}{\bar{x}^2}\, s_{\bar{x}}$$

Das Resultat sieht in beiden Fällen (Gleichungen 2.6 und 2.7) einfacher aus, wenn mit dem *relativen* statt mit dem *absoluten* Fehler gerechnet wird:

$$\frac{s_{\bar{f}}}{|\bar{f}|} \cong \frac{s_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \qquad \text{(Die relativen Fehler sind einander gleich!)} \tag{2.8}$$

$$f(x) = x^{\,b} \tag{2.9}$$

$$\bar{f} \cong \bar{x}^{\,b} \tag{2.10}$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} = b\bar{x}^{\,b-1} \tag{2.11}$$

$$s_{\bar{f}}^2 \cong (b\,\bar{x}^{\,b-1})^2\, s_{\bar{x}}^2 \qquad \text{oder} \qquad s_{\bar{f}} \cong |b\,\bar{x}^{\,b-1}|\, s_{\bar{x}} \tag{2.12}$$

$$\frac{s_{\bar{f}}}{|\bar{f}|} \cong |b|\, \frac{s_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \qquad (|b|\text{-facher Relativfehler!}) \tag{2.13}$$

Berechne $s_{\bar{f}}$ und $s_{\bar{f}}/|\bar{f}|$ selber für:

$$f(x) = \sin x \tag{2.14}$$

$$f(x) = \cos x \tag{2.15}$$

$$f(x) = \mathrm{e}^x \tag{2.16}$$

$$f(x) = 5x^2 + k \qquad (k \text{ konstant}) \tag{2.17}$$

$$f(x) = ax^2 - bx \qquad (a,\, b \text{ konstant}) \tag{2.18}$$

Zwei oder mehrere unabhängige Grössen

Etwas schwieriger wird es, wenn die zu berechnende Grösse f von *zwei* mit Fehlern behafteten Beobachtungsgrössen x und y abhängt: $f = f(x, y)$

Die Formel von Taylor lautet hier (für kleine dx_i, dy_i):

$$f(x_i, y_i) \cong f(\bar{x}, \bar{y}) + df_i \qquad \text{wobei:} \tag{2.19}$$

$$df_i = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}} dx_i + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}} dy_i \tag{2.20}$$

Erklärung: $\partial f/\partial x$ heisst „partielle Ableitung“ der Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ nach der Variablen x. Partiell ableiten bedeutet: Wir bilden von einer Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ die Ableitung nach *einer* Variablen und *halten dabei die übrigen Variablen fest.* (Wir können anschliessend nach einer anderen Variablen ableiten und wiederum die übrigen als Konstanten betrachten, usw.)

Man kann nach dem Muster von Unterabschnitt 2.4.2 selber herleiten, dass somit:

$$\bar{f} \cong f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{und} \quad s_{\bar{f}}^2 \cong \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}}\right)^2 s_{\bar{x}}^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}}\right)^2 s_{\bar{y}}^2 \tag{2.21}$$

Wäre $s_{\bar{y}} = 0$, so hätten wir den zuerst behandelten Fall der Abhängigkeit von nur *einer* Variable

$$s_{\bar{f}}^2 \equiv s_{\bar{f}(x)}^2 \cong \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}\right)^2 s_{\bar{x}}^2 \qquad \text{(Definition des Symbols } s_{\bar{f}(x)}\text{)} \tag{2.22}$$

Man kann für den Fall zweier Variablen auch schreiben:

$$s_{\bar{f}(x,y)}^2 = s_{\bar{f}(x)}^2 + s_{\bar{f}(y)}^2 \qquad \text{wobei:} \tag{2.23}$$

$$s_{\bar{f}(x)}^2 \cong \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}}\right)^2 s_{\bar{x}}^2 \qquad \text{und} \qquad s_{\bar{f}(y)}^2 \cong \left(\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}}\right)^2 s_{\bar{y}}^2 \tag{2.24}$$

In einem Satz: *Der von $s_{\bar{x}}$ herrührende Fehler $s_{\bar{f}(x)}$ und der von $s_{\bar{y}}$ herrührende Fehler $s_{\bar{f}(y)}$ werden quadratisch addiert, was den Fehler $s_{\bar{f}}$ von $\bar{f}$ ergibt.* Das ist das **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß** für $f(x, y)$.

Die Erweiterung auf den Fall, wo f von mehr als zwei Variablen abhängt, lässt sich erraten (und beweisen):

$$s_{\bar{f}(x,y,z,\ldots)}^2 = s_{\bar{f}(x)}^2 + s_{\bar{f}(y)}^2 + s_{\bar{f}(z)}^2 + \ldots \tag{2.25}$$

Das ist die praktisch wichtigste Form des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes: *Zuerst* wird der von jeder Eingangsgrösse $(x, y, z, \ldots)$ herrührende Fehler *einzeln formelmässig* und *numerisch* erfasst; *anschliessend* werden die *numerischen Werte quadratisch addiert,* um den *numerischen* Fehler des Schlussresultates zu berechnen.

Anwendung auf ausgewählte Funktionen

$$f(x,y) = x + y \tag{2.26}$$

$$\bar{f} \cong \bar{x} + \bar{y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}} = 1 \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}} = 1$$

$s_{\bar{f}}^2 = s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2$ (Quadratische Addition der absoluten Fehler!)

Suche selber: $f(x,y) = x - y$ (2.27)

$$f(x,y) = x \cdot y \tag{2.28}$$

$$\bar{f} \cong \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}} = \bar{y} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{y=\bar{y}\\x=\bar{x}}} = \bar{x}$$

$$s_{\bar{f}}^2 = \bar{y}^2 \cdot s_{\bar{x}}^2 + \bar{x}^2 \cdot s_{\bar{y}}^2$$

Vereinfachung:

$$\frac{s_{\bar{f}}^2}{\bar{f}^2} = \frac{s_{\bar{x}}^2}{\bar{x}^2} + \frac{s_{\bar{y}}^2}{\bar{y}^2}$$

Das heisst, dass hier die *relativen* Fehler quadratisch addiert werden!

Suche selber: $f = \dfrac{x}{y}$ (2.29)

Konkretes Beispiel: Wir wollen mit Hilfe eines mathematischen Pendels die Erdbeschleunigung g bestimmen. Wie genau können wir das? (vgl. DMK/DPK, S. 181)

Aus $T = 2\pi \left(\dfrac{L}{g}\right)^{1/2}$ T: Schwingungsdauer (2.30)

folgt $g = \dfrac{4\pi^2 L}{T^2}$ d. h. $g = g(L,T)$

Wir messen L und T, die mit den Fehlern s_L und s_T behaftet sind.

Bemerkung: Die Schätzwerte für L und T sowie ihre Fehler haben wir zwar aus einer Mittelwertbildung erhalten, aber für die Fehlerfortpflanzung spielt das keine Rolle (Siehe Bemerkung unter 2.3.6!). Wir schreiben deshalb L, T, s_L und s_T statt $\bar{L}$, $\bar{T}$, $s_{\bar{L}}$ und $s_{\bar{T}}$.

Aufgabe 4:

- Wie schreibt man das Messresultat nach vorigem Beispiel auf, wenn mit folgenden Zahlenwerten gerechnet wird:

  $T = (2.00 \pm 0.02)$ s, $\quad L = (99.8 \pm 0.3)$ cm

- Streuung der Mittelwerte: In Unterabschnitt 2.3.4 steht $s_{\bar{x}} = s_x/\sqrt{N}$. Beweisen Sie dies mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes von Gauß!

Bemerkungen zum Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß

- Der Fehler des Endresultats ist kleiner als die Summe der Fehler der einzelnen Messgrössen: $s_f < s_{f(x)} + s_{f(y)}$
- Die partiellen Ableitungen geben das „Gewicht“ an, das der Fehler der entsprechenden Messgrösse bei der Berechnung des Gesamtfehlers hat.
- Ohne auf den Geltungsbereich weiter einzugehen, wollen wir annehmen, dass das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz *bei statistischen Fehlern* immer angewandt werden darf, sofern die betrachteten Grössen *nicht voneinander abhängig sind.*
- Oft wirkt sich die Streuung einer Beobachtungsgrösse viel stärker auf das Endresultat aus als die Streuung der übrigen Beobachtungsgrössen, so dass diese vernachlässigt werden können. Eine grobe Abschätzung erspart oft mühsames Rechnen!

2.5 Systematische Fehler

2.5.1 Systematische Fehler der Beobachtungsgrösse

Ursachen systematischer Fehler: Beispiele

A Kleine Einflüsse, die oft nur schwer zu erfassen sind, werden vernachlässigt:

- Luftreibung
- Widerstand elektrischer Leitungen
- Reibungskräfte in Lagern

B Benutzung von Näherungsformeln zwecks einfacherer Rechnung:

- Abbrechen lassen von Reihen nach wenigen Gliedern: z. B. β statt $\sin\beta$ für kleine Winkel
- Anwenden von linearen und beschränkt gültigen Gesetzen an Stelle von allgemeineren, komplizierteren Gesetzen

C Fehler an Messgeräten:

- zu langes oder zu kurzes Metermass
- Strom wird über schlecht geeichten Widerstand gemessen
- krummer Zeiger am Messinstrument
- Verschiebung des Nullpunkts (mechanisch oder elektrisch)

D Grobfahrlässige Fehler:

- Verwechslung von Einheiten
- Einstellen eines falschen Messbereichs
- Nullpunkt nicht kontrolliert
- Vergessen von Kommas, Punkten, Exponenten

Diese Liste ist natürlich nicht vollständig!

Verhindern und Abschätzen systematischer Fehler

A Solche Fehler sind grundsätzlich nie ganz zu vermeiden. Man sollte aber immer versuchen, die Grössenordnung eines störenden Einflusses abzuschätzen. Was immer möglich ist und stets gemacht werden muss: Im Versuchsbericht auf mögliche Fehlerquellen hinweisen!

B Zuverlässigkeit der Näherung überprüfen; im Bericht darauf hinweisen, dass es sich um eine Näherung handelt.

C Durch sorgfältiges Kalibrieren können solche Fehler meist stark reduziert werden. Voraussetzung ist, dass man sie bemerkt. Oft hilft ein Vergleich mit Messungen von Zweitgeräten.

D Besteht der Verdacht auf ein Missgeschick der Art D, hilft nur eines: Überprüfen und evtl. Wiederholen der Messung.

2.5.2 Fortpflanzung systematischer Fehler

Die Voraussetzungen für die Anwendung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes sind bei systematischen Fehlern im Allgemeinen nicht erfüllt. Es gibt keine allgemein gültige Regel, wie sich systematische Fehler fortpflanzen.
Ein Fall, wo ein systematischer Fehler wie ein statistischer Fehler quadratisch zu den übrigen Fehlern addiert werden kann, ist der Eichfehler eines Voltmeters (z. B. 1 %), wenn man ihn als Standardabweichung der Messungen auffasst, die man mit vielen Geräten desselben Typs ausführen könnte. Man schaut also das Voltmeter als Stichprobe mit $N = 1$ an, wobei s_x bekannt ist.
Es ist ein wesentliches Ziel des Anfängerpraktikums, die Suche nach systematischen Fehlern und den Umgang mit ihnen zu üben.

2.5.3 Darstellung

Es soll hier lediglich der wichtige Hinweis gegeben werden, dass aufgespürte Quellen systematischer Fehler im Versuchsprotokoll erwähnt werden müssen.

2.6 Zusammenstellung der Formeln

2.6.1 Direkte Beobachtung

Durchschnitt oder arithmetischer Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad N\text{: Anzahl Messungen oder „Umfang der Stichprobe“} \tag{2.31}$$

Standardabweichung

Standardabweichung der Einzelmessungen oder „Fehler der Einzelmessung“:

$$s_x = \frac{1}{\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{2.32}$$

Standardabweichung der Durchschnitte oder „Fehler des Mittelwerts“:

$$s_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N(N-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{2.33}$$

Relativer „Fehler des Mittelwerts“:

$$r_{\bar{x}} = \frac{s_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \equiv \frac{s_{\bar{x}}}{|\bar{x}|} \cdot 100\% \tag{2.34}$$

2.6.2 Indirekte Beobachtung: Fehler zusammengesetzter Grössen

Zwischen einer Messgrösse x und ihrem geschätzten Wert (z. B. $\bar{x}$) wird im Folgenden nicht mehr unterschieden. (Siehe Bemerkung unter 2.3.6!)

Streuung s von f (allgemein)

Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$s_f^2 = s_{f(x)}^2 + s_{f(y)}^2 + \ldots \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \ldots \tag{2.35}$$

Die Werte der partiellen Ableitungen werden dabei an der Stelle ($x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$) berechnet.

Spezialfälle

Summe und Differenz

$$f = x + y \qquad \text{und} \qquad f = x - y \tag{2.36}$$

$$s_f^2 = s_x^2 + s_y^2 \tag{2.37}$$

Produkt und Quotient

$$f = x \cdot y \qquad \text{und} \qquad f = \frac{x}{y} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{y}{x} \tag{2.38}$$

$$\left(\frac{s_f}{f}\right)^2 = \left(\frac{s_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{s_y}{y}\right)^2 \tag{2.39}$$

Potenz

$$f = x^a \tag{2.40}$$

$$\frac{s_f}{|f|} = |a| \, \frac{s_x}{|x|} \tag{2.41}$$

Literaturverzeichnis

[1] Frauenfelder, Huber, *Physik I* , Basel, 1967.
Bibliothek ITP: ODD137 (2.03.42)

[2] W. H. Gränicher, *Messung beendet - was nun?* , Stuttgart, 1994.
Bibliothek ITP: KSD201

[3] R. H. Leaver, T. R. Thomas, *Versuchsauswertung* , Braunschweig, 1977.
Bibliothek ITP: PDA136 (0.85.38), KVZ150

[4] Linder, Berchtold, *Elementare statistische Methoden* , Basel, 1979.
Bibliothek ITP: KAE167 (1.71.31)

[5] G. L. Squires, *Messergebnisse und ihre Auswertung* , Berlin, 1971.
Bibliothek ITP: PDA134 (0.85.37), PDA135

[6] W. Walcher, *Praktikum der Physik* , Stuttgart, 1966.
Bibliothek ITP: PDA133 (0.85.36)

[7] E. Kreyszig, *Statistische Methoden und ihre Anwendungen* , Göttingen, 1968.
Bibliothek ITP: KAE201 (1.71.13)

[8] P. R. Bevington, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science* , NY, 1969.
Bibliothek ITP: KSD139 (1.71.22), KSD140

[9] R. von Steiger, *Statistische Verteilungen* , Kapitel 3 in diesem Skript.

[10] E. Kopp, F. Meier, R. Moor, *Radioaktivität* , Kapitel 6 in diesem Skript.

[11] DMK/DPK, *Formeln und Tafeln* , Zürich, 1977, und neuere Auflagen.

Kapitel 3

Statistische Verteilungen

für den ständigen Gebrauch im Praktikum

3.1 Messungen und Fehler

Wir unterscheiden zwei grundsätzlich verschiedene Arten von Messungen:

- Vergleichsmessungen, z. B. Messen einer Länge, Masse oder Zeit. Sie liefern Werte aus einem kontinuierlichen Wertebereich, also Werte aus **Q** bzw. **R**.
- Zählmessungen, z. B. Anzahl β^--Zerfälle in 1 Gramm ^{3}H pro Sekunde. Sie liefern Werte aus einem diskreten Wertebereich, also Werte aus **N**.

Wir beschränken uns hier auf direkte Messungen, indirekte werden unter dem Stichwort Fehlerfortpflanzung im Skript zur Fehlerrechnung behandelt.
Eine physikalische Grösse kann durch Messung nie genau bestimmt werden, denn diese ist immer mit einem Fehler behaftet. Trotzden ist die Annahme wesentlich, dass die Grösse einen eindeutigen Wert, den „wahren Wert“ μ hat, auch wenn dieser der Messung grundsätzlich unzugänglich ist. Die Quellen der Messfehler werden wiederum im Skript zur Fehlerrechnung behandelt; wir beschränken uns hier auf die statistischen Fehler.

3.2 Mittelwert und Varianz

Betrachten wir eine Serie von n Messungen, welche die Werte x_1, x_2, $\ldots x_n$ geliefert habe. Dabei beobachten wir meist eine Häufung dieser Werte um einen bestimmten Wert $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{3.1}$$

$\overline{x}$ heisst arithmetischer Mittelwert der n Werte x_i; er ist ein guter Schätzwert für den wahren Wert μ in dem Sinne, dass die Summe der Abweichungsquadrate S^2 minimal wird:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 = \text{Min.} \Leftrightarrow x = \overline{x} \tag{3.2}$$

Als Mass für die durchschnittliche Abweichung der x_i von $\overline{x}$ verwenden wir die Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2) \tag{3.3}$$

Ihre positive Wurzel s heisst Standardabweichung der Werte x_i. Sie hat die gleiche Dimension wie die Variable x und ist ein Mass für die Breite der Verteilung der Messwerte x_i um den Mittelwert $\overline{x}$.

Bemerkung: Der Nenner $n-1$ in Gleichung (3.3) (statt n, wie man vielleicht erwarten könnte) ist die Anzahl Freiheitsgrade der Summe der n Quadrate $(x_i - \overline{x})^2$. Die n Freiheitsgrade der n unabhängigen Messungen werden durch die Bedingung in Gleichung (3.2) um Eins reduziert (s. Kreyszig, S. 39, 168 ff).

3.3 Klassenbildung und Häufigkeit

Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Vergleichsmessung einen ganz bestimmten Wert x zu erhalten, ist vom Mass Null. Es ist deshalb einfacher, den Wertebereich in Intervalle (Klassen) zu unterteilen und nach der Wahrscheinlichkeit zu fragen, mit der ein Messwert in eine bestimmte Klasse fällt, denn diese wird eine endliche Zahl sein. Wir teilen also den Wertebereich in m Intervalle I_j $[x_j^l, x_j^r]$, wobei sich diese berühren sollen, d.h. $x_j^r = x_{j+1}^l$. Alle Messwerte x_i mit $x_j^l < x_i < x_j^r$ betrachten wir danach als gleich und ordnen ihnen einen einheitlichen Wert x_j zu, z.B. die Klassenmitte $x_j = (x_j^l + x_j^r)/2$. Die Anzahl f_j der n Messwerte, welche in die Klasse j fallen, heisst absolute Klassenhäufigkeit. Die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung den Wert x_j zu finden, beträgt also

$$p_j = f_j/n \tag{3.4}$$

p_j heisst auch relative Klassenhäufigkeit.

Übung: Zeige, dass die Normierungsbedingung

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \tag{3.5}$$

erfüllt ist. Die Normierungsbedingung sagt aus, dass bei einer Messung mit Wahrscheinlichkeit Eins ein beliebiger Wert gemessen wird.

Übung: Zeige, dass sich Mittelwert und Varianz mit Hilfe der p_j folgendermassen schreiben lassen:

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{m} p_j x_j \tag{3.6}$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{j=1}^{m} p_j (x_j - \overline{x})^2 \tag{3.7}$$

3.4 Wahrscheinlichkeitsverteilungen

3.4.1 Allgemeines

Zeichnet man die p_j als Funktion der x_j auf, erhält man das Wahrscheinlichkeitsdiagramm. Dieses geht im Grenzwert $n \to \infty$ und $x_j^l \to x_j^r$ $\forall j$, d.h. für beliebig viele Messungen und beliebig schmale Klassen, in die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(x)$ über.
Vorsicht: $\varphi(x)$ ist **nicht** die Wahrscheinlichkeit, den Wert x zu messen! Sinnvoll ist nur die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, einen Wert im (infinitesimalen) Intervall $[x, x + dx]$ zu finden. Diese ist natürlich auch infinitesimal und beträgt

$$dp(x) = \varphi(x)dx \tag{3.8}$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert x_i im Intervall $[x_j^l, x_j^r]$ zu erhalten, wird durch Integration ermittelt:

$$p(x_j^l < x_i \leq x_j^r) = \int_{x_j^l}^{x_j^r} \varphi(x)dx \tag{3.9}$$

Ebenso beträgt die Wahrscheinlichkeit für $x_i < x_j$

$$p(x_i < x_j) = \int_{-\infty}^{x_j} \varphi(x)dx \tag{3.10}$$

Die Normierungsbedingung (Gleichung 3.5) bleibt natürlich beim Grenzübergang erhalten, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1 \tag{3.11}$$

Etwas anders liegen die Verhältnisse bei Zählmessungen: Da nur eine abzählbare Zahl von Resultaten in Frage kommt, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung diskret und die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung (Zählung) ein ganz bestimmtes Resultat n_i zu erhalten, endlich:

$$p(n_i) = \varphi_i \tag{3.12}$$

Die Normierungsbedingung lautet in diesem Fall

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i = 1 \tag{3.13}$$

Übung: Wie lauten bei Zählmessungen die analogen Ausdrücke für die Gleichungen (3.9) und (3.10)?

3.4.2 Normalverteilung

Die Erfahrung zeigt, dass bei Vergleichsmessungen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen oft folgende Bedingungen erfüllen:

- Messwerte x_i mit kleinen Abweichungen $\varepsilon_i = x_i - \overline{x}$ vom Mittelwert $\overline{x}$ sind häufiger als solche mit grossen ε_i und sehr grosse ε_i kommen praktisch nicht vor.
- Man findet etwa gleich häufig positive wie negative Abweichungen ε_i, d.h. die Verteilung ist symmetrisch um $\overline{x}$.

Eine analytische Funktion mit diesen Eigenschaften ist z.B.

$$\varphi(x) = Ne^{-(x-a)^2/(2\,\sigma^2)}, \tag{3.14}$$

falls die beiden Parameter a und σ mit dem Mittelwert x bzw. der Standardabweichung s der Messwerte identifiziert werden. N ist nicht etwa ein freier Parameter, sondern festgelegt durch die Forderung, dass $\varphi(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung sein soll und deshalb die Normierungsbedingung erfüllen muss, also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1 \Leftrightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{3.15}$$

Übung: Zeige dies!
Die so erhaltene Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\varphi(x;a,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-a)^2/(2\,\sigma^2)} \tag{3.16}$$

heisst Normal- oder Gaussverteilung. In vielen Fällen ist die Annahme gerechtfertigt, dass die Resultate von Vergleichsmessungen gemäss (3.16) verteilt sind. Die beiden Parameter a und σ haben einfache geometrische Deutungen: Während a den Ort des Maximums angibt, liegen die beiden Wendepunkte bei $a \pm \sigma$. 2σ wird deshalb auch als Breite der Verteilung bezeichnet. Die Summenfunktion $\Phi(x;a,\sigma)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei der Messung einer normalverteilten Grösse einen Wert $x_i \leq x$ zu finden:

$$\Phi(x;a,\sigma) = p(x_i \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x';a,\sigma)dx' \tag{3.17}$$

Dieses lntegral ist nicht elementar; man findet aber die Funktion $\Phi(x)$ in Tabellen, [1] jedoch nur für $a = 0$ und $\sigma = 1$.

Übung: Zeige, dass man durch eine geeignete Variablentransformation die Summenfunktion $\Phi(x;a,\sigma)$ für beliebige Werte von a und σ aus den tabellierten Werten für $a = 0$ und $\sigma = 1$ berechnen kann.

Die Wahrscheinlichkeit, einen Messwert im Intervall $a \pm \xi$ zu finden, lässt sich mit Φ schreiben als

$$p(a-\xi < x_i \leq a+\xi) = \Phi(a+\xi;a,\sigma) - \Phi(a-\xi;a,\sigma) = 1 - 2\Phi(a-\xi;a,\sigma) \tag{3.18}$$

Wählt man $\xi = \sigma$, 2σ oder 3σ, findet man

$$\begin{aligned} \xi = \sigma: &\quad p(a-\sigma < x_i \leq a+\sigma) &&= 68.27\% \\ \xi = 2\sigma: &\quad p(a-2\sigma < x_i \leq a+2\sigma) &&= 95.45\% \\ \xi = 3\sigma: &\quad p(a-3\sigma < x_i \leq a+3\sigma) &&= 99.73\% \end{aligned} \tag{3.19}$$

d.h. gut 2/3 der Messwerte einer normalverteilten Grösse liegen innerhalb einer $\pm 1\sigma$-Umgebung um den Mittelwert a und weniger als drei Promille ausserhalb einer $\pm 3\sigma$-Umgebung!

3.4.3 Binomialverteilung

Experimente, für deren Ausgang nur zwei Möglichkeiten existieren, führen auf die Binomialverteilung. Beispiele:

- Münzenwurf: Zahl oder nicht Zahl
- Würfel: Sechs oder nicht Sechs
- Zeitmessung: $t < 1\,\mathrm{s}$ oder $t \geq 1\,\mathrm{s}$

[1] z.B. Bronstein und Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Harri Deutsch, Thun, 1982, oder Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical functions, Dover, New York 1968

Ereignis A treffe mit der Wahrscheinlichkeit w ein, das dazu komplementäre Ereignis $\overline{A}$ wegen der Normierungsbedingung also mit Wahrscheinlichkeit $1 - w$. Was ist nun die Wahrscheinlichkeit $p_n(k)$, bei n voneinander unabhängigen Messungen (z.B. Münzenwürfen usw.) genau k mal (in beliebiger Reihenfolge) das Resultat A zu finden?
$p_n(k)$ ist das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit $p_n(k, \text{geordnet})$, k mal das Resultat A in einer bestimmten Reihenfolge zu bekommen, und der Anzahl M der möglichen Reihenfolgen, mit denen man in n Messungen k mal das Resultat A erhält. Da die Ereignisse unabhängig sind, ist $p_n(k, \text{geordnet})$ das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$p_n(k, \text{geordnet}) = w^k (1 - w)^{n-k} \tag{3.20}$$

Die Anzahl der Reihenfolgen (Permutationen) ist:

$$M = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.21}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet demnach

$$p_n(k) = M \times p_n(k, \text{geordnet}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k (1 - w)^{n-k} \tag{3.22}$$

Durch Vergleich mit dem binomischen Lehrsatz sieht man, dass sie bereits normiert ist, d.h. sie erfüllt die Bedingung

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = 1 \tag{3.23}$$

(siehe auch Bevington and Robertson, S. 20).
Die Binomialverteilung ist unhandlich und wird deshalb wo immer möglich durch die Normal- oder die Poissonverteilung approximiert. Eine Näherung durch die Normalverteilung ist möglich für grosse n und nichtextreme w (d.h. w weder zu nahe bei 0 noch bei 1).

Beweis: s. Kreyszig, Anhang 1 (gute Übung für den Umgang mit unendlichen Reihen).

3.4.4 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung tritt immer dann auf, wenn die Wahrscheinlichkeit w eines Ereignisses klein und die Anzahl n der Messungen gross ist.

Beispiele:

- Anzahl Druckfehler pro Buchseite
- Anzahl Sechser pro Ziehung des Zahlenlottos
- Anzahl Zerfälle in 1 Gramm ^{210}Pb pro Sekunde

Sie ist wie die Binomialverteilung diskret und asymmetrisch, da sie nur für Werte aus $\mathbf{N}_0$ definiert ist. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion lautet

$$p_m(k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m} \tag{3.24}$$

Sie hat den einzigen Parameter $m = wn$, der Mittelwert und Varianz zugleich darstellt (d.h. $\sqrt{m}$ ist proportional zur Breite der Verteilung). Der Faktor e^{-m} ergibt sich übrigens aus der Normierungsbedingung, denn es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} = e^m \tag{3.25}$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_m(k) = e^m e^{-m} = 1 \tag{3.26}$$

Oft wird die Poissonverteilung zur Approximation der Binomialverteilung benützt. Dies ist immer dann möglich, wenn n gross und w klein ist (konkret heisst dies etwa $n > 8$ und $W < 1/8$). Dies ist bei den meisten Zählexperimenten erfüllt, weshalb sie für ihre Analyse das wichtigere (und einfachere) Werkzeug darstellt.

Übung: Erstelle Wertetabellen der Binomialverteilung mit n =4, w =1/4; n =8, W =1/8 und n =100, W =1/100 für jeweils einige k und vergleiche sie mit der Poissonverteilung mit m =1. Zeige dann:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{w\to 0} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) w^k (1-w)^{n-k} = \frac{(nw)^k}{k!} e^{-nw} \tag{3.27}$$

Hinweis: Die Grenzwerte sind so auszuführen, dass nw konstant bleibt.

Übung (schwierig): Zeige, dass die Poissonverteilung für grosse m (d.h. etwa $m > 8$) in die Normalverteilung mit Mittelwert m und Standardabweichung $\sqrt{m}$ übergeht:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m^k}{k!} e^{-m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-(k-m)^2/(2m)} \tag{3.28}$$

Verwende dabei zur Approximation der Fakultät die Stirling-Formel

$$k! \simeq \sqrt{2\pi k}\ k^k\ \exp(-k + \frac{1}{12k}) \tag{3.29}$$

Abbildung 3.1 zeigt eine Übersicht über die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und die Zusammenhänge zwischen ihnen. In Abbildung 3.2 sind Beispiele der Verteilungsfunktionen graphisch dargestellt.

3.5 Zentraler Grenzwertsatz. Verteilung des Mittelwerts

Führt man eine Serie von n Messungen mehrmals durch, so wird man natürlich nicht jedesmal den gleichen Mittelwert finden, sondern diese werden auch gemäss einer Wahrscheinlichkeitsverteilung um den wahren Wert verteilt sein. Der Mittelwert $\overline{x}$ von n Messungen $\overline{x_i}$ ist also wie diese mit einem Fehler behaftet; man findet durch anwenden des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Formel für den Mittelwert (Gleichung 3.1)

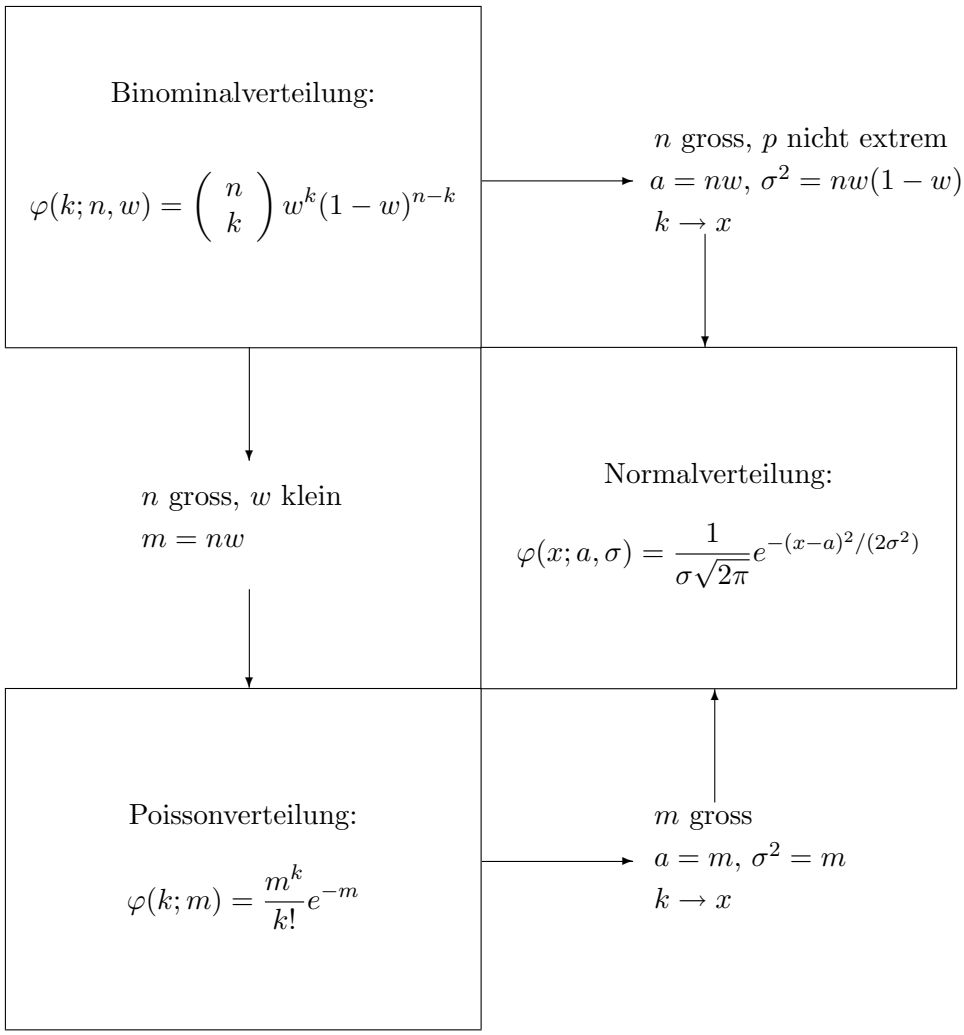


Abbildung 3.1: Zusammenfassung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$s_{\overline{x}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 s_x^2\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_x = \left[\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x_i} - \overline{x})^2\right]^{1/2} \tag{3.30}$$

wo s_x der Fehler der Einzelmessung sei (siehe Gleichung (3.3)). Bei n Messungen verkleinert sich der Fehler also um einen Faktor $1/\sqrt{n}$. Dies bedeutet, dass der Mittelwert durch Vergrössern der Messserie beliebig nahe zum wahren Wert μ gebracht werden kann.

Satz: (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Mittelwerte $\overline{x_i}$ einer mehrmals wiederholten Messserie sind in jedem Fall näherungsweise normalverteilt um den wahren Wert μ, und zwar unabhängig vom jeweiligen Verteilungsgesetz der Einzelmessungen. Die Güte der Näherung ist proportional der Anzahl Einzelmessungen.

Beweis: Siehe z.B. Brandt, S. 119 ff.

Dies erlaubt uns analoge Aussagen für den Mittelwert von beliebig verteilten Messungen wie für die normalverteilte Einzelmessung (Gleichung (3.19)):

$$\begin{aligned} p(\mu - s_{\overline{x}} < \overline{x} \leq \mu + s_{\overline{x}}) &= 68.27\% \\ p(\mu - 2s_{\overline{x}} < \overline{x} \leq \mu + 2s_{\overline{x}}) &= 95.45\% \\ p(\mu - 3s_{\overline{x}} < \overline{x} \leq \mu + 3s_{\overline{x}}) &= 99.73\% \end{aligned} \tag{3.31}$$

Ebenso gilt die Umkehrung:

$$p(\overline{x} - s_{\overline{x}} < \mu \leq \overline{x} + s_{\overline{x}}) = 68.27\% \tag{3.32}$$

usw., d.h. der unbekannte wahre Wert liegt mit Wahrscheinlichkeit 2/3 im Intervall $[\overline{x} - s_{\overline{x}}$, $\overline{x} + s_{\overline{x}}]$. Als Standardfehler bezeichnet man üblicherweise die 68 %-Fehlergrenze (auch 1σ-Fehler genannt). Als Ergebnis einer Serie von Einzelmessungen schreibt man also

$$x = \overline{x} \pm s_{\overline{x}} \tag{3.33}$$

und meint damit den 1σ-Fehler, wenn nicht etwas anderes angegeben wird. Bei Zählmessungen, deren Werte poissonverteilt sind, kann dieses Verfahren sogar noch vereinfacht werden: Anstatt viele Messungen über kurze Zeiten zu machen, können wir uns mit einer einzigen entsprechend ausgedehnten Messung begnügen. Aus dem so erhaltenen Wert m kann natürlich kein Mittelwert berechnet werden; wir müssen ihn deshalb direkt als Schätzung für den wahren Wert μ nehmen. Die Standardabweichung σ ist jedoch vorerst unbekannt. Wir wissen aber (siehe Übung 3.4.4), dass die Poissonverteilung für grosse m in eine Normalverteilung mit Mittelwert m und Standardabweichung
$\sqrt{m}$ übergeht. $\sqrt{m}$ ist deshalb ein guter Schätzwert für σ (sogar ein besserer als m für μ). Der Absolutfehler dieser Zählmessung mit Resultat m ist also $s{=}\sqrt{m}$, und damit können wir das Resultat angeben als

$$M = m \pm \sqrt{m} \tag{3.34}$$

(68 %-Fehlerschranke).

Übung: Eine ausgedehnte Messung einer poissonverteilten Grösse habe das Resultat m ergeben, ihr Fehler ist also $s{=}\sqrt{m}$. Zeige, dass eine Unterteilung dieser Messung in n Einzelmessungen mit $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m$ (m_i seien die Resultate der Einzelmessungen) auf denselben Fehler $\sqrt{m}$ führt. (Verwende dazu das Fehlerfortpflanzungsgesetz.)

3.6 Lineare Regression

Oft wissen wir aus der Theorie oder stellen aus den Resultaten fest, dass zwei gemessene Variablen x und y einer Serie von n Messungen einen (ev. näherungsweisen) linearen Zusammenhang erfüllen. Es stellt sich daher das Problem, eine Gerade

$$y = ax + b \tag{3.35}$$

zu finden, welche die n Datenpaare (x_i, y_i) möglichst gut approximiert. Eine solche Gerade is leicht zu finden, falls

- die Fehler s_x vernachlässigbar und
- die Fehler s_y unabhängig von x und y sind.

Andernfalls ist das Vorgehen komplizierter, siehe z.B. Brandt, S. 315 ff.
Als optimale Gerade definieren wir jene, für welche die Quadratsumme der (senkrecht zur x-Achse) gemessenen Differenzen zwischen Datenpunkt und Gerade minimal wird, also

$$D = \sum_{i=0}^{n} [y(x_i) - y_i]^2 = \sum_{i=0}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = \text{Min.} \tag{3.36}$$

Die beiden freien Parameter a und b werden durch die Extremalbedingung $dD = 0$ festgelegt:

$$\frac{\partial D}{\partial a} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0 \tag{3.37}$$

Ausführen der partiellen Ableitungen führt auf

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i + b\, n &= \sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \tag{3.38}$$

und damit ergibt sich für die Parameter der Regressionsgeraden

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ b &= \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

wobei alle Summen über $i = 1$ bis n laufen.

Bemerkung: Wie erwähnt werden die Abstände zur Bildung der Quadratsumme D senkrecht zur x-Achse gemessen, da die s_x als vernachlässigbar angenommen wurden. Diese Voraussetzung ist im Praktikum normalerweise erfüllt, muss in der Praxis aber immer geprüft werden. Zum Schluss bleibt noch der Fehler der aus Gleichung (3.39) berechneten Steigung zu bestimmen. Unter den erwähnten Voraussetzungen beträgt er

$$s_a = \frac{c}{\sigma_x} \left(\frac{D}{(n-1)(n-2)} \right)^{1/2}, \tag{3.40}$$

wo σ_x die Standardabweichung der x_i und D die Quadratsumme aus Gleichung (3.36) ist. c ist eine Zahl der Ordnung 1. [2]
Der Fehler s_b des Achsenabschnitts b kann nicht unabhängig von s_a angegeben werden, denn die Regressionsgerade geht immer durch den Punkt $(\overline{x}, \overline{y})$.

Übung: Beweisen Sie dies!

Daher ist durch die Angabe von s_a das Intervall bereits bestimmt, in dem b liegen kann.

Übung: Aus der Theorie sei bekannt, dass eine Serie von Datenpunkten (x_i, y_i) durch eine Gerade durch den Ursprung approximiert werden könne. Finden Sie analog dem oben skizzierten Verfahren den Parameter a der Geradengleichung

$$y = ax, \tag{3.42}$$

welche die Wertepaare (x_i, y_i) optimal approximiert. (Die Bedingungen an die Fehler s_x, s_y seien erfüllt.)

Die Voraussetzung $b = 0$ wird bei einigen Versuchen des Praktikums gemacht (z.B. Saite, Kreisel).

[2] Exakt: c ist die Lösung der Gleichung

$$F(c) = (1 + \gamma)/2, \tag{3.41}$$

wo γ das gewählte Signifikanzniveau für s_a (z. B. 1σ, d.h. $\gamma = 0.68$) und F die t-Verteilung mit n-2 Freiheitsgraden ist (siehe z. B. Kreyszig, S.98).

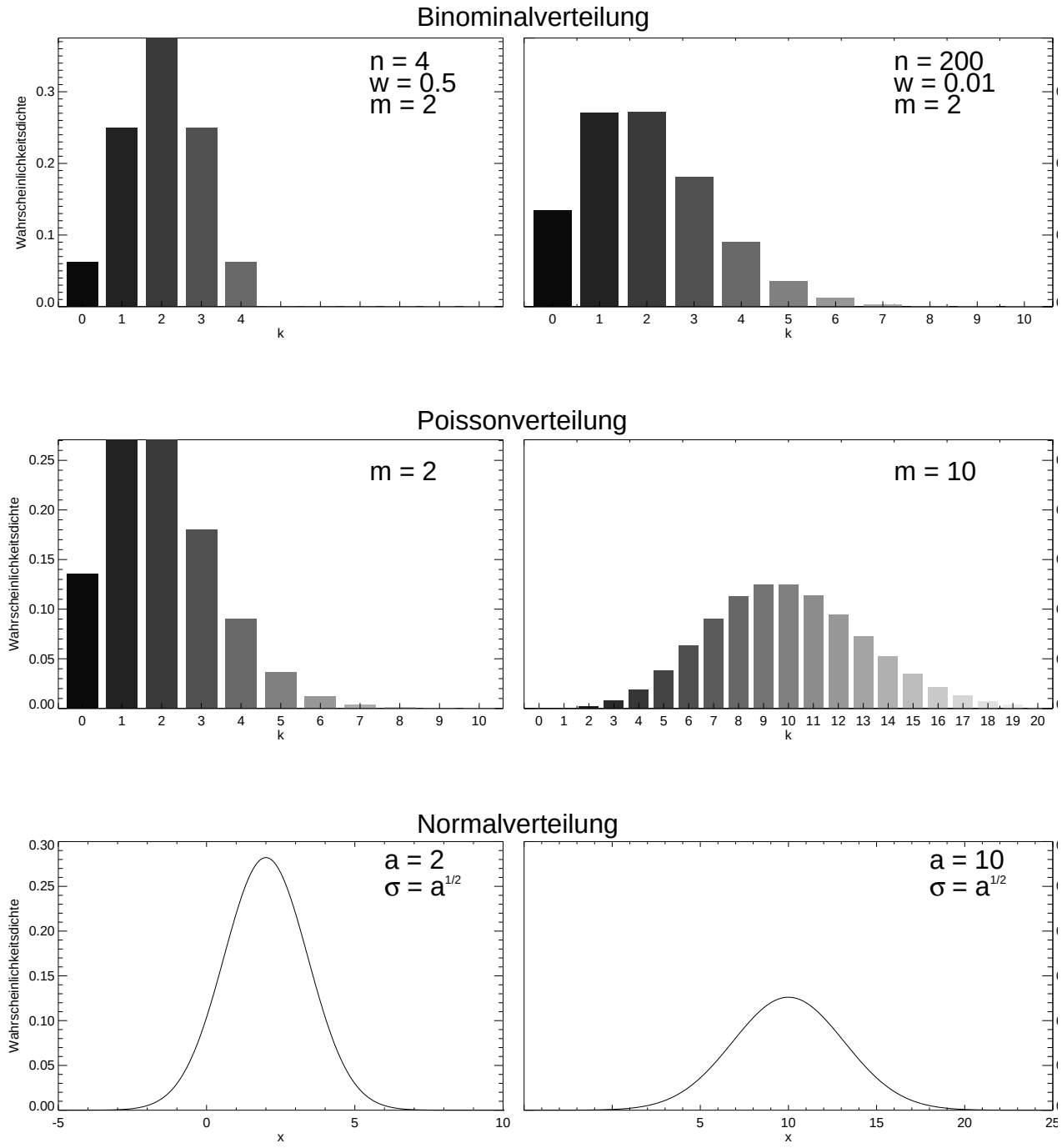


Abbildung 3.2: Graphische Darstellungen zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Literaturverzeichnis

[1] E. Kreyszig, *Statistische Methoden und ihre Anwendungen* , Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen (1979, 1991).
Bibliothek ExWi: KAE 233

[2] S. Brandt, *Datenanalyse: mit statistischen Methoden und Computerprogrammen* , B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim (1992).
Bibliothek ExWi: KAE 205

[3] P. R. Bevington and D. K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences* , McGraw-Hill, New York (1992).
Bibliothek ExWi: KVZ 205

[4] F. Bühler, *Fehlerrechnung* , Kapitel 2 in diesem Skript.

Kapitel 4

Bestimmung der elektrischen Elementarladung nach Millikan

ROBERT A. MILLIKAN

The electron and the light-quant from the experimental point of view

Nobel Lecture, May 23, 1924

The fact that Science walks forward on two feet, namely theory and experiment, is nowhere better illustrated than in the two fields for slight contributions to which you have done me the great honour of awarding me the Nobel Prize in Physics for the year 1923.

Sometimes it is one foot which is put forward first, sometimes the other, but continuous progress is only made by the use of both - by theorizing and then testing, or by finding new relations in the process of experimenting and then bringing the theoretical foot up and pushing it on beyond, and so on in unending alternations.

The terms of this year's award state that it is given for work on the fundamental electrical unit and on photoelectricity. In both fields my own work has been that of the mere experimentalist whose main motive has been to devise, if possible, certain crucial experiments for testing the validity or invalidity of conceptions advanced by others.

The conception of electrical particles or atoms goes back a hundred and seventy years to Benjamin Franklin who wrote about 1750: "The electrical matter consists of particles extremely subtle since it can permeate common matter, even the densest, with such freedom and ease as not to receive any appreciable resistance."

This theoretical conception was developed in no little detail by Wilhelm Weber[1] in papers written in 1871. The numerical value of the ultimate electrical unit was first definitely estimated by G. Johnstone Stoney[2] in 1881, and in 1891 this same physicist gave to it the name *the electron**.

http://www.nobel.se/physics/laureates/1923/millikan-bio.html

4.1 Einleitung

Am Anfang des 20. Jahrhunderts wurde die Quantelung der elektrischen Ladung erst vermutet (Faradaysche Gesetze der Elektrolyse, atomarer Aufbau der Materie, ...). Millikan [1911] bestimmte 1911 erstmals direkt die Elementarladung e, indem er die Fallgeschwindigkeit elektrisch geladener Öltröpfchen im Feld eines luftgefüllten Plattenkondensators mass. Er fand dabei, dass die beobachteten Ladungen innerhalb einer Messgenauigkeit von 0.2% immer ganze positive oder negative Vielfache einer Ladung e waren. In der Absolutmessung von e irrte er sich aber wegen eines systematischen Fehlers (Viskosität der Luft) um nahezu 1%.

Eine möglichst genaue Kenntnis der Naturkonstanten e ist für die Physik von grosser Bedeutung: Die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung hängt direkt von der Grösse des Ladungsquants e ab. In vielen Formeln der Atom-, Kern-, Elementarteilchen- und Festkörperphysik tritt daher e explizit auf. Der zur Zeit empfohlene Wert von e beträgt [CODATA, 2006]

$$e = 1.6021764(87) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Die Ziffern in Klammern entsprechen dem Standardfehler in den letzten Stellen des Zahlenwertes. e ist positiv, die Ladung eines Elektrons ist also $-e$.

4.2 Beschreibung des Millikanversuches

In einem luftgefüllten Kondensator mit horizontal justierten Platten werden durch einen Zerstäuber Öltröpfchen (Radius $\mathrm{r} = 5 - 10 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$) hineingeblasen und bei Dunkelfeldbeleuchtung mit einem Mikroskop beobachtet. Zur Verhinderung von Luftturbulenzen innerhalb des Kondensators ist dieser aussen mit einer Wand abgeschlossen, in welche Fenster zur Beobachtung und Beleuchtung, sowie ein Loch für den Druckausgleich und den Zerstäuber eingefügt sind. Beim Zerstäuben werden einige Öltröpfchen durch Zerreissen (Reibungselektrizität; Öl ist ein Isolator) elektrisch aufgeladen. Atome von ungeladenen Tröpfchen können auch mittels γ-Strahlen ionisiert werden, und wegen des Herausfliegens einzelner Elektronen aus den Tröpfchen bleibt eine nichtverschwindende Gesamtladung zurück.

Besteht nun zwischen den Kondensatorplatten ein elektrisches Feld, so bewegen sich die Öltröpfchen je nach Richtung der Vektorsumme von Gravitationskraft, Auftrieb und elektrostatischer Kraft nach oben oder nach unten.

4.3 Bewegung elektrisch geladener Öltröpfchen

Betrachte ein Öltröpfchen der Ladung $q = Ne$ im Feld $\vec{E}$: Wegen der Luftreibung stellt sich nach einer kurzen Zeit eine konstante Geschwindigkeit $\vec{v}$ ein, und die Summe von Graviationskraft, elektrostatischer Kraft, Auftrieb und Reibungskraft verschwindet.

$$m\vec{g} + q\vec{E} + \vec{A} + \vec{F}_r = \vec{0} \tag{4.1}$$

Da alle Kräfte und Bewegungen zueinander parallel sind, genügt eine eindimensionale Betrachtung. Es genügt also, die Vertikal-Komponenten der Vektoren zu betrachten:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \rho g + qE - \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{\mathrm{L}} g + F_r = 0 \tag{4.2}$$

In der obigen Formel fehlt noch die explizite Form der Luftreibung. Als erster Ansatz bietet sich das Stokessche Gesetz (nachzulesen bei Vogel [1995]) an. Das Reynoldsche Kriterium

$$Re = \frac{2\, r\, \rho\, v}{\eta} \leq Re_{krit} \approx 0.4$$

ist für die auftretenden Geschwindigkeiten bei weitem erreicht (als Übung zu zeigen). Die Luftströmung um das Öltröpfchen wäre daher laminar. Die Grundvoraussetzung des Gesetzes von Stokes, nämlich die Bewegung einer Kugel in einem homogenen Kontinuum, ist nicht erfüllt, denn die Tröpfchenradien sind nicht viel grösser als die mittlere freie Weglänge l in Luft ($l = 7\times10^{-8}$ m bei Normalbedingungen). Die Stokessche Formel bedarf daher einer Korrektur, für die das Verhältnis l/r massgebend ist. Nach Cunningham [Davies, 1945] soll die makroskopisch gemessene Viskosität η durch den Wert $\eta_c = \eta\,(1+A\,\frac{l}{r})^{-1}$ ersetzt werden, wobei

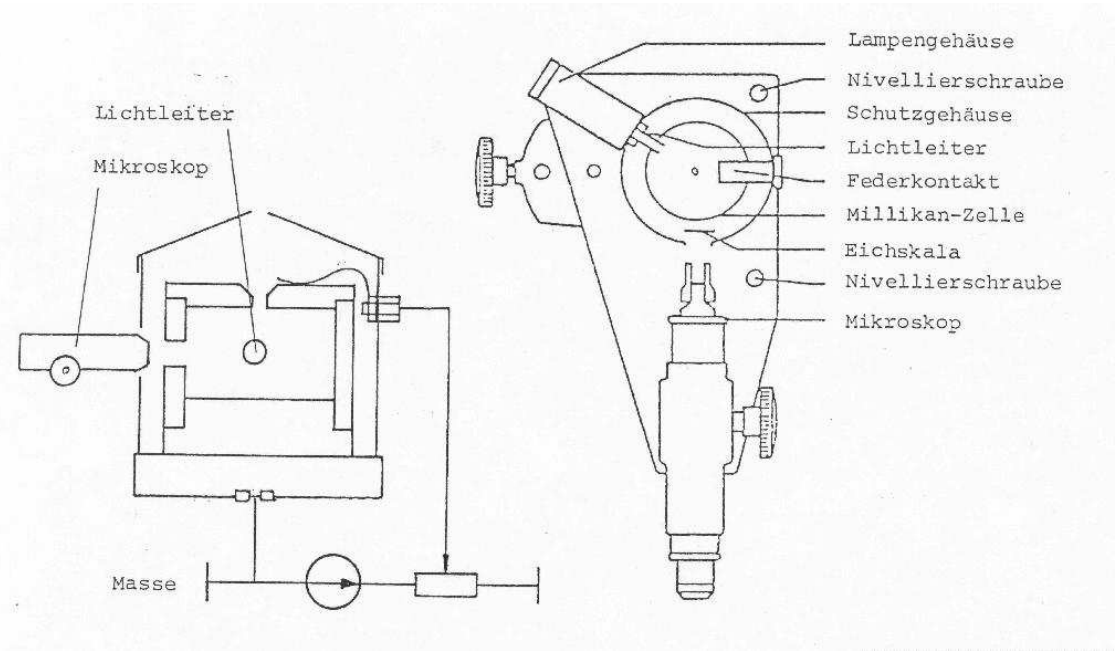


Abbildung 4.1: Skizze des Versuchsaufbaus

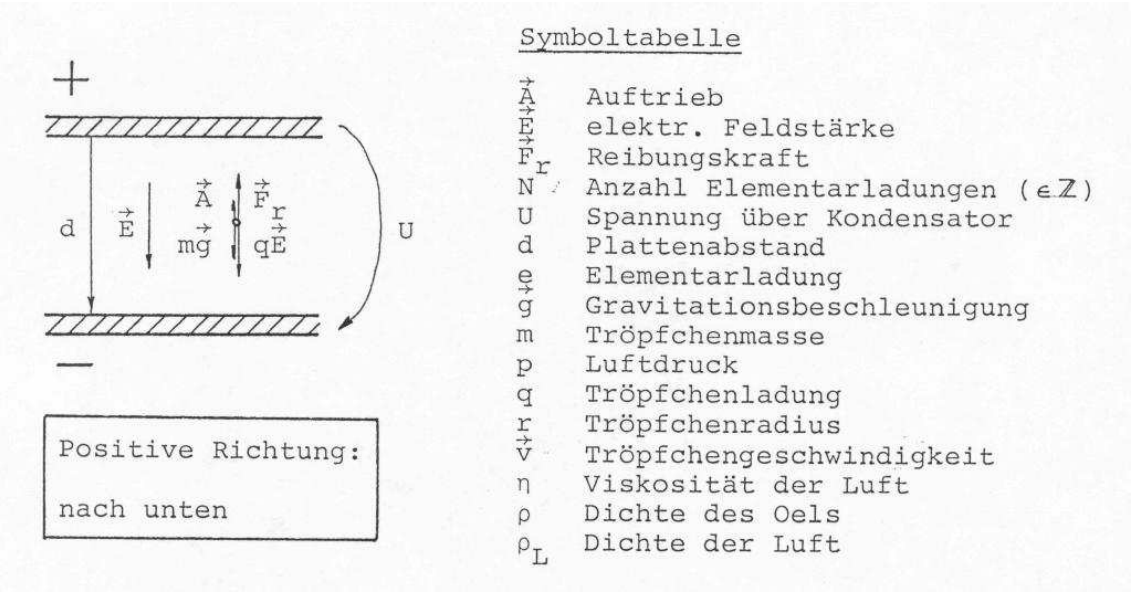


Abbildung 4.2: Schema und Symboltabelle

A eine empirisch zu bestimmende Konstante ist. Setzt man für l die indirekt proportionale Druckabhängigkeit ein, so erhält man:

$$\eta_c = \eta\,(1 + \frac{B}{p\,r})^{-1}; \qquad B = 8.266 \times 10^{-3}\ \mathrm{Pa\,m} \tag{4.3}$$

η_c wird also für kleinere r kleiner. Somit kann die Beziehung (2) durch die explizite Angabe der Reibungskraft vervollständigt werden.

$$\frac{4\pi}{3}\,r^3\,(\rho\ -\ \rho_L)\,g + q\,\frac{U}{d} - 6\,\pi\,\eta_c\,r\,v = 0 \tag{4.4}$$

Im Experiment sind alle Grössen von (4) ausser r und der gesuchten Tröpfchenladung q bekannt oder können leicht gemessen werden. Um nun q zu bestimmen, müssen mit demselben Tröpfchen mindestens zwei Messungen bei verschiedenen Bedingungen durchgeführt werden. Die einzige einfach zu verändernde Grösse ist die Spannung über dem Kondensator. Es gibt also je nach spezieller Wahl des Parameters U, unterschiedliche Messmethoden.

4.4 Messmethoden

4.4.1 Methode I

Zuerst wird E so gewählt, dass das Tröpfchen schwebt ($v = 0$): $E = E_\mathrm{s} = U_\mathrm{s}/d$ (U_s: Schwebespannung). Gemäss der Richtungskonvention im Abschnitt 3 ist U dann positiv, wenn das Potential der oberen Kondensatorplatte grösser ist als das der unteren. Mit der zweiten Messung bestimmt man für dasselbe Tröpfchen die konstante Fallgeschwindigkeit v_0 ohne elektrisches Feld, wozu die Fallzeit t_0 für eine bekannte Weglänge s_0 gemessen wird. Je eingesetzt in die

Gleichung (4) erhält man folgendes System:

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_L) g + q \frac{U}{d} = 0 \tag{4.5}$$

$$\frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_L) g - 6\pi \eta_c r v = 0 \tag{4.6}$$

Aus (6) lässt sich r isolieren:

$$r = 3 \sqrt{\frac{\eta_c(r)\, s_0}{2(\rho - \rho_L) g\, t_0}} \tag{4.7}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (5) ein und isoliert q, so ergibt sich:

$$q = -18\pi \left(\frac{\eta_c(r)\, s_0}{t_0}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2(\rho - \rho_L) g}\right)^{1/2} \frac{d}{U_s} \tag{4.8}$$

Nun hängt η_c nach (3) von r ab. Man muss also noch aus (3) und (6) oder (7) durch Iteration oder explizites Lösen r und η_c berechnen und den gefundenen Wert für η_c in (8) einsetzen. Würde man die drei Gleichungen (3), (5) und (6) formal lösen, indem man r und η_c elimimiert, würde der Ausdruck für q unübersichtlich. → Übung: Berechne r explizit aus (3) und (6).

4.4.2 Methode II

Bei dieser Methode wird die konstante Tröpfchengeschwindigkeit ohne und mit einem nichtverschwindenden, aber sonst beliebigen elektrischen Feld gemessen. Die Geschwindigkeiten seien $v_0 = s_0/t_0$ bei $E = 0$ und $v = s/t$ bei $E = U/d$. Gemäss Richtungskonvention in Abschnitt 3 ist bei einer Aufwärtsbewegung s negativ. Die Messung von v_0 bei $E = 0$ ist für beide Methoden notwendig, deshalb kann die aus Gleichung (6) gewonnene Formel (7) übernommen und in (4) eingesetzt werden. Dies ergibt (→ Übung):

$$q = -18\pi \left(\frac{\eta_c(r)\, s_0}{t_0}\right)^{3/2} \left(\frac{1}{2(\rho - \rho_L) g}\right)^{1/2} \frac{d}{U} \left(1 - \frac{t_0\, s}{s_0\, t}\right) \tag{4.9}$$

4.4.3 Methode III

Bei der Methode III misst man die Tröpfchengeschwindigkeit für zwei betragsmässig gleich grosse Feldstärken, welche einmal parallel, einmal antiparallel zu g und mindestens so gross sind, dass sich die Bewegungsrichtung umkehrt. In einem Fall bewegt sich das Tröpfchen mit $v_\mathrm{u} = s_\mathrm{u}/t_\mathrm{u}$ bei U_u nach oben (up), im anderen mit $v_\mathrm{d} = s_\mathrm{d}/t_\mathrm{d}$ bei U_d nach unten (down). Nach Voraussetzung ist immer $U_\mathrm{u} = -U_\mathrm{d}$. Wählt man als messtechnische Vereinfachung zudem $s_\mathrm{u} = -s_\mathrm{d}$, so erhält man aus Gleichung (4) für die beiden Fällen das folgende System:

$$\text{up} \qquad \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_L) g - q \frac{U_d}{d} + 6\pi \eta_c r \frac{s_d}{t_u} = 0 \tag{4.10}$$

$$\text{down} \qquad \frac{4\pi}{3} r^3 (\rho - \rho_L) g + q \frac{U_d}{d} - 6\pi \eta_c r \frac{s_d}{t_d} = 0 \tag{4.11}$$

Durch Addition der Gleichungen (10) und (11) erhält man den Tröpfchenradius r (→ Übung):

$$r = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\eta_c(r)\, s_d}{(\rho - \rho_L) g} \left(\frac{1}{t_d} - \frac{1}{t_u}\right)} \tag{4.12}$$

Durch Substraktion von (10) und (11) sowie Einsetzen von (12) erhält man:

$$q = \frac{9\pi}{2}\frac{d}{U_d}\sqrt{\frac{\eta_c^3(r)\, s_d^3}{(\rho\, -\, \rho_L)\, g}\left(\frac{1}{t_d} - \frac{1}{t_u}\right)}\left(\frac{1}{t_d} + \frac{1}{t_u}\right) \tag{4.13}$$

4.4.4 Ergänzung

In allen drei Methoden ist q proportional zu $\eta_c^{3/2}$. Die Fehlerbetrachtung (siehe Kapitel 4.5) wird zeigen, dass die Viskosität besonders genau bekannt sein sollte. Neben der Korrektur für die kleinen Tröpfchenradien muss berücksichtigt werden, dass die Viskosität von Gasen temperaturabhängig, in erster Näherung aber nicht druckabhängig ist. Damit wird

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T) \tag{4.14}$$

Für Luft ist: $\eta_0 = 1.708{\times}10^{-5}$ kg/ms
$\alpha = 2.37{\times}10^{-3}\ (^{\circ}\mathrm{C})^{-1}$ $\qquad 18\,^{\circ}\mathrm{C} \leq T \leq 54\,^{\circ}\mathrm{C}$

4.4.5 Fehlerbetrachtungen

Gib auf die folgenden Fragen eine begründete Antwort:

- Welche der drei Methoden ist zur Bestimmung von q am geeignetsten?
- Bei der Berechnung der relativen Genauigkeit von q treten die relativen Fehler einiger Grössen mit hohem Gewicht auf. Diese Grössen müssen daher besonders sorgfältig gemessen und ihre mögliche Temperaturabhängigkeit berücksichtigt werden. Welche Grössen sind das?
- Welchen Einfluss hat die Korrektur von Cunningham?
- Aus konstruktiven Gründen kann die Lufttemperatur in der Millikanzelle nicht gemessen werden. Genügt es stattdessen, die Lufttemperatur im Raum, etwa vor und nach dem Praktikum zu messen?
- Wird das Öltröpfchen durch seine Oberflächenspannung so stark komprimiert, dass eine Korrektur der Öldichte nötig ist? (fakultativ)
- Ist es günstiger, die Ladungen einiger Tröpfchen immer mit allen drei Methoden zu bestimmen, oder sollen stattdessen mehr Tröpfchen mit je nur einer Methode gemessen werden?

4.5 Aufgabe

Bestimme nach der Millikanmethode die elektrische Elementarladung des Elektrons und gib dazu einen vernünftigen, möglichst kleinen Fehler an. Führe die Messungen nach einem dir vorgängig erstellten, realistischen Arbeitsplan durch.

Abbildung 4.3: Versuchsanordnung

Literaturverzeichnis

[1] R. A. Millikan; Phys. Rev. 32, 349, 1911

[2] Committee on Data for Science and Technology (CODATA 2006); http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e

[3] H. Vogel; Gerthsen Physik, Kap. 3.3, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 18. Auflage, 1995

[4] C. N. Davies; Proceedings of the Physical Society Vol. 57, Issue 4, 259, 1945

Kapitel 5

Photoelektrischer Effekt

5.1 Ziel

In diesem Versuch soll mit Hilfe des Photoeffekts die Grösse h/e gemessen werden, wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum und e die Elementarladung ist. Der Literaturwert beträgt:

$$h/e = 4.1357 \cdot 10^{-15}\ Vs \tag{5.1}$$

5.2 Theorie

Wird eine metallische Oberfläche beleuchtet, können durch das Licht Elektronen herausgeschlagen werden. Man hat folgende Beobachtungen gemacht:

1. Die Energie der emittierten Elektronen hängt linear von der Frequenz des Lichts ab.
2. Für jedes Material existiert eine Grenzfrequenz. Hat das eingestrahlte Licht eine kleinere Frequenz als diese Grenzfrequenz, so können keine Elektronen emittiert werden.
3. Die Anzahl (pro Fläche und Zeit) emittierter Elektronen ist direkt proportional zu der Intensität des einfallenden Lichts.

Es existiert also insbesondere kein Zusammenhang zwischen Intensität des Lichts und der Energie der Elektronen! Diese Beobachtungen finden ihre Interpretation in der Quantennatur des Lichts: Das elektromagnetische Feld ist gequantelt in Photonen, d.h. in Energiepakete mit der Energie:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot c/\lambda \tag{5.2}$$

ν und λ ist die Frequenz bzw. die Wellenlänge des Lichts, und h ist das Planck'sche Wirkungsquantum.
Beim Austritt aus der Metalloberfläche müssen die Elektronen ein Potential Φ überwinden, benötigen also die Austrittsarbeit $W = e \cdot \Phi$ (work function). Φ ist im Prinzip eine Materialkonstante des Metalls, hängt aber stark von Verunreinigunen an der Oberfläche ab. (Es ist im Praktikum nicht möglich Φ genau zu bestimmen.) Damit ein Elektron durch Absorption eines Photons das Metall verlassen kann, muss gelten

$$h \cdot \nu > e \cdot \Phi \tag{5.3}$$

Den Überschuss erhält das Elektron als kinetische Energie:

$$h \cdot \nu = e \cdot \Phi + 1/2 \cdot m_e \cdot v^2 \tag{5.4}$$

(Einstein, 1905; 1921 erhielt er für die theoretische Voraussage des Photoeffektes den Nobelpreis. Der Effekt wurde 1914 von Millikan experimentell bestätigt.) Ein vernachlässigbarer Teil der Energie muss vom Metallgitter aufgenommen werden, da sonst der Impulssatz nicht erfüllt ist (Beweis als freiwillige Übung!). Die kinetische Energie E_e der austretenden Photoelektronen kann als Funktion der Frequenz des Lichts gemessen werden:

$$E_e = 1/2 \cdot m_e \cdot v^2 = h \cdot \nu - e \cdot \Phi \tag{5.5}$$

Die Steigung der erwarteten Geraden ist h. In diesem Praktikum wird E_e mit der Gegenfeldmethode bestimmt: Man schaltet gegenüber dem beleuchteten Metall (Kathode) eine Anode

auf die Spannung U und misst den Photostrom $I(U)$, der dazwischen durch das Vakuum fliesst. Mit zunehmenden U nimmt der Strom ab, bis schliesslich bei U_0 der Photostrom $I(U_0) = 0$ ist. U_0 entspricht also gerade dem Potential welches die emittierten Elektronen noch zu überwinden vermögen. D.h. mit (5.5)

$$U_0 = E_e/e = (h/e) \cdot \nu - \Phi. \tag{5.6}$$

Mit der Messung von U_0 bei verschiedenen Frequenzen kann man also nur h/e, nicht aber h selbst bestimmen.

5.3 Versuchsaufbau

5.3.1 Prinzip

Eine Quecksilberdampflampe (Hg-Lampe) sendet Licht in mehreren scharfen Wellenlängen aus. Damit jeweils nur Licht einer Wellenlänge zur Photozelle gelangt, müssen zwischen Lampe und Photozelle geeignete Filter angeordnet werden.
Die Elemente der Photozelle (Photokathode und Anode) sind in einem evakuierten Glaskolben eingebaut. Zur Messung des Photostromes müssen folgende Elemente in einem Stromkreis in Serie geschaltet werden:

- Photozelle
- regelbare Spannungsquelle
- Ampèremeter

Die Spannung über der Photozelle wird mit einem Voltmeter gemessen.

5.3.2 Messung sehr kleiner Ströme

Die in diesem Versuch zu messenden Ströme liegen im Bereich von 1 nA bis zu einigen μA. Die kleinstmöglichen Ströme, die mit einem üblichen Drehspulinstrument gemessen werden

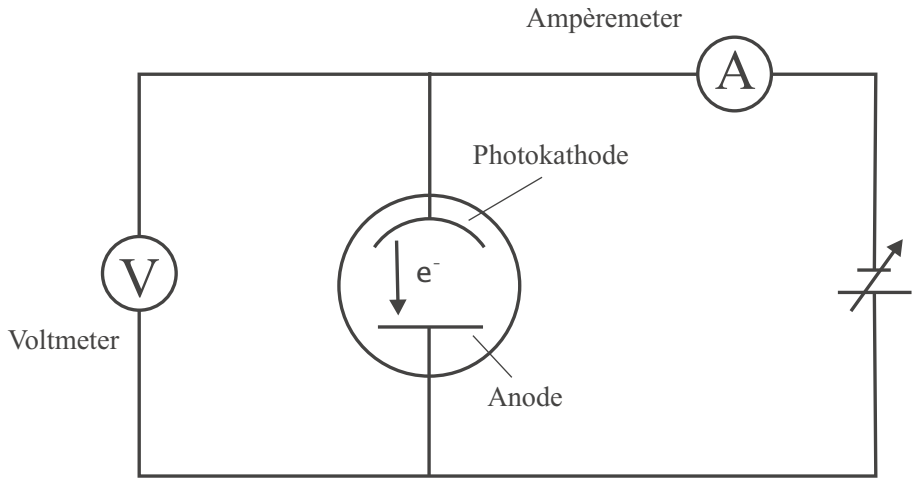


Abbildung 5.1: Einfachstes Schaltschema einer Photoröhre

können, liegen in der Grössenordnung von 1 μA. Für kleinere Ströme bieten sich folgende Möglichkeiten an:

- Galvanometer (vgl. entsprechender Versuch)
- Elektrometerröhrenverstärker
- Gleichstromverstärker mit Halbleiterelementen

Für uns drängt sich die letzte der genannten Möglichkeiten auf, wobei eine Verstärkerschaltung mit Operationsverstärkern verwendet wird (vgl. Elektronik V, Fortgeschrittenenpraktikum). Ein besonderes Augenmerk beim Messen kleiner Ströme verdient das Phänomen der Störpulse durch Fremdfelder. Durch überall vorhandene Wechselfelder (z.B. von Netzkabeln, Eisenbahnfahrleitungen, usw.) werden in elektrischen Leitern Ströme induziert, welche die Messungen um so mehr stören, je kleiner der zu messende Strom ist. Das Problem kann zum Teil gelöst werden, indem ein möglichst grosser Anteil der elektrischen Leiter einer Schaltung in einem Faradayschen Käfig gelegt wird. Für elektrische Leitungen verwendet man deshalb weitgehend abgeschirmte Kabel, bei denen der zentrale stromführende Leiter von einem auf Massepotential liegenden Drahtgeflecht umgeben ist.

5.3.3 Material

Im Anfängerpraktikum steht folgendes Material zur Verfügung:

- Quecksilberdampflampe mit Speisegerät
- Vier Filter, jeweils durchlässig für die Wellenlängen der Hg-Linien 405 nm (violett Nr. 46833), 436 nm (blau Nr. 46832), 546 nm (grün Nr. 46807), 578 nm (gelb Nr. 46830)
- Photozelle RCA 934
- Regelbares Gleichspannungsgerät
- Gleichstromverstärker mit Digitalanzeige-Element
- Digitalvoltmeter zur Messung der Spannung über der Photozelle (Vorsicht: Das Umschalten des Spannungsbereiches des Voltmeters ändert dessen Eingangswiderstand, deshalb sollte das Gerät nicht im “Auto”-Mode betrieben werden.

5.4 Experiment

Ziel des Versuchs ist die möglichst genaue Bestimmung der Grösse h/e und die Abschätzung der Genauigkeit des Resultats.

5.4.1 Vorgehen

Für jede Linie aus dem Hg-Spektrum (violett, blau, grün und gelb) kann der Photostrom im Stromkreis nach Abb. 5.2 als Funktion der Spannung über der Photozelle gemessen werden. Damit erhält man vier Kurven $I_i = I_i(U)$ (i: Index für die versch. Filter).
Damit nicht unnötig viele Punkte gemessen werden müssen, ist es sinnvoll, sich genau zu überlegen, welcher Spannungsbereich besondern kritisch ist (vgl. auch Kapitel 5.5).

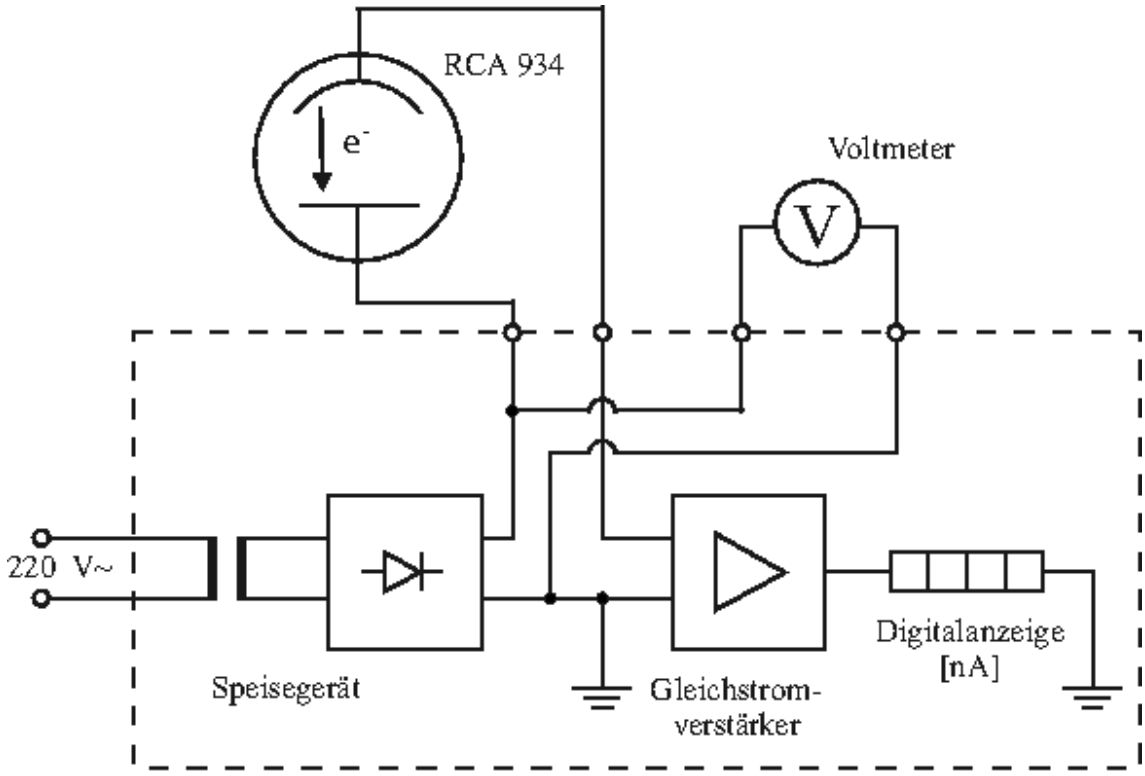


Abbildung 5.2: Effektives Schaltschema

5.5 Auswertung

Aus den vier gemessenen Kurven $I_i(U)$ muss nun möglichst genau jene Spannung abgelesen werden, bei welcher aus der Kathode herausgeschlagene Elektronen die Anode gerade nicht mehr ereichen können. Diese Spannung liegt im Bereich $-2.5V < U_0 < 0V$; die Messpunkte sollten im kritischen Bereich jeder Frequenz sehr dicht liegen. Das Ablesen wird erschwert durch die Tatsache, dass auch aus der Anode Photoelektronen austreten. Diese werden bei $U < 0$ zur Kathode beschleunigt und erzeugen einen negativen Strom von wenigen nA. Die Spannung U_0 liegt nun dort, wo die Kurven vom negativen Sättigungswert anzusteigen beginnen, d.h. wo der Kathodenstrom $I_i(U)$ nicht mehr durch den Anodenstrom verfälscht wird. Sie ist für jede Kurve nach einem möglichst einheitlichen Kriterium zu bestimmen. Dazu könnte es günstig sein, die Kurven auf eine gemeinsame Skala zu normieren.
Diese vier Spannungen $U_0(\nu)$ sollten nun auf einer Geraden mit Steigung h/e liegen (Gleichung 5.6). Das Ergebnis dieses Versuches, d.h. die Bestimmung von h/e erfolgt nun, indem diese Gerade durch einen „least-squares-fit“ berechnet wird; weiterhin ist deren Fehler $\Delta(h/e)$ aus den Einzelfehlern $\Delta(U_0(\nu))$ zu bestimmen (vgl. Skript „Statistische Verteilungen“, Gleichung 3.40).

Literaturverzeichnis

[1] A. Einstein; Ann. Physik 17, 132, 1905

[2] R. A. Millikan; Phys. Rev. 7, 355, 1916

[3] A. C. Melissinos; Experiments in Modern Physics, Chapter 4, Academic Press, 1966

[4] Gerthsen, Kneser, Vogel; Physik, Kap. 8.1.2., Springer, 1977 (oder neuere Auflagen)

[5] Skript “Statistische Verteilungen”

Kapitel 6

Radioaktivität

6.1 Theorie

Die Theorie zum Versuch (Aufbau von Atomkernen, Radioaktivität, Zerfallsgesetz, Zerfallsarten) ist in der Vorlesung Physik II behandelt worden. Zur Vorbereitung auf den Versuch sei die Lektüre des Kapitels 5 im Skript von Prof. Jürg Schacher empfohlen.

6.1.1 Aktivität, Zählratenmessung, Poissonverteilung

Definition: Die Aktivität A einer Quelle ist definiert als die Anzahl Zerfälle pro Zeiteinheit. Die Einheit ist $[A] = 1$ Becquerel $= 1$ Bq $= 1$ Zerfall pro Sekunde.
Eine veraltete Einheit ist 1 Curie $= 1$ Ci $= 3.7 \cdot 10^{10}$ Zerfälle pro Sekunde $\simeq$ Aktivität von 1 g Radium.
Wiederholt man Aktivitätsmessungen mehrmals, so sieht man, dass die gemessenen Raten streuen, auch wenn man das Zeitintervall Δt noch so genau messen kann. Dies liegt an der statistischen Natur des Zerfallprozesses. Man kann für den *einzelnen* Kern nie den genauen Zeitpunkt des Zerfalls angeben, sondern nur die Zerfallswahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Zeitintervall. Die gemessene Rate ist also eine zufällige Grösse. Nun stellt sich die Frage, was die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.
Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen *eines* Ereignisses bei einem Zufallsexperiment sei p. Die Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei N Versuchen das Ereignis genau k-mal eintrifft, führt auf die Binomialverteilung (oder binomische Verteilung, vgl. Skript „Statistische Verteilungen“). Ableitung: Man kennt die Wahrscheinlichkeit p für das Zerfallen eines einzelnen Kerns im Intervall Δt. Eine Quelle von N instabilen Kernen entspricht N zugleich ausgeführten Versuchen mit je einem Kern. Voraussetzung: $\Delta t \ll T_{\frac{1}{2}}$. Damit ändern N und p praktisch nicht mit der Zeit, und $p \ll 1$ (Grenzfall, siehe unten) ist ebenfalls erfüllt.
Die zufällige Grösse $k =$ „Anzahl Zerfälle im Intervall Δt“ ist also binomial verteilt:

$$P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \ . \tag{6.1}$$

Für den Grenzfall $N \to \infty, p \to 0$ (Mittelwert $\mu = N \cdot p =$ konstant) geht die Binomialverteilung in die Poissonverteilung über:

$$p_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \ . \tag{6.2}$$

Beim Ausmessen einer radioaktiven Quelle besteht das Problem darin, aus der gemessenen Anzahl Impulse k im Intervall Δt den unbekannten Mittelwert μ zu schätzen. Es lässt sich zeigen, dass der unbekannte Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% im Intervall $\left[k - \sqrt{k},\ k + \sqrt{k}\right]$ liegt. Diese Aussage gilt exakt für $\mu \to \infty$. Der relative Fehler wird mit wachsender Impulszahl k kleiner:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}} \ . \tag{6.3}$$

6.1.2 Wechselwirkung der Kernstrahlung mit Materie

γ-Strahlung

In Materie verliert ein γ-Quant seine Energie durch Photoeffekt, Comptonstreuung und Paarbildung.

1. Der Photoeffekt ist dominant bei Energien $E_\gamma \leq 50\,\text{keV}$. Das γ-Quant verschwindet; es wird ein Elektron herausgeschlagen (meist aus der K-Schale, falls E_γ grösser ist als die Bindungsenergie der K-Elektronen).

$$E_\gamma = h\nu = \text{Bindungsenergie des Elektrons} + E_{kin}(e^-) \tag{6.4}$$

2. Beim Comptoneffekt findet ein elastischer Stoss eines Quants mit einem freien Elektron statt. Das gestreute Quant hat eine kleinere Energie als das ungestreute, d.h. eine grössere Wellenlänge. Die an das Elektron abgegebene Energie kann mit Energie- und Impulssatz berechnet werden.

3. Die Paarbildung findet bei Energien $> 1\,\text{MeV}$ statt. Aus elektromagnetischer Strahlung entsteht in der Nähe eines schweren Kerns Materie: ein Elektron und ein Positron. E_γ muss grösser sein als die Ruheenergien von e^+ und e^- zusammen. Nach dem Abbremsen zerstrahlt das e^+ zusammen mit einem e^- zu zwei γ-Quanten von je $0.51\,\text{MeV}$.

Die γ-Strahlung wird von Materie mehr oder weniger gut absorbiert. Denkt man sich einen Absorber (z.B. ein Stück Blei) in dünne Schichten der Dicke dx zerlegt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein auf eine bestimmte Schicht treffendes Photon darin eine Reaktion eingeht, für alle Schichten gleich (unabhängig von x).

$$dJ = -\mu\, J\, dx\ , \tag{6.5}$$

wobei J die Photonenflussdichte (Photonen pro m^2 und Sekunde) ist. Somit gilt

$$J = J_0\, e^{-\mu x} = J_0\, e^{-\frac{\mu}{\rho}\rho x} = J_0\, e^{-\mu_m \rho x} \tag{6.6}$$

μ wird linearer Absorptionskoeffizient genannt und ist abhängig von der γ-Energie.
$\mu_m = \mu/\rho$ ist der Massenabsorptionskoeffizient (in cm^2/g, Abb. 6.4). Die „Dicke“ eines Absorbers wird dann als $d \cdot \rho$ (in g/cm^2) angegeben.

β-Strahlung

Im Unterschied zum Photon macht das Elektron beim Durchgang durch Materie sehr viele Reaktionen. In inelastischen Stössen mit Hüllenelektronen verliert es seine Energie in vielen kleinen Portionen. Da die Reaktionswahrscheinlichkeit von der Energie abhängt, ist sie in jeder Schicht ein wenig anders. Zudem sind die von einer Quelle beim Absorber eintreffenden Elektronen nicht monoenergetisch, sondern haben ein kontinuierliches Energiespektrum; somit ist ein kompliziertes Absorptionsgesetz zu erwarten.

α-Strahlung

Auch α-Strahlen verlieren ihre Energie durch viele Stösse mit Hüllenelektronen. α-Strahlen sind monoenergetisch und werden kaum gestreut ($m_\alpha \gg m_e$). Deshalb haben sie in Materie eine einheitliche Reichweite (z.B. $42\,\text{mm}$ in Luft, $62\,\mu\text{m}$ in Gewebe für $E_\alpha = 6\,\text{MeV}$).

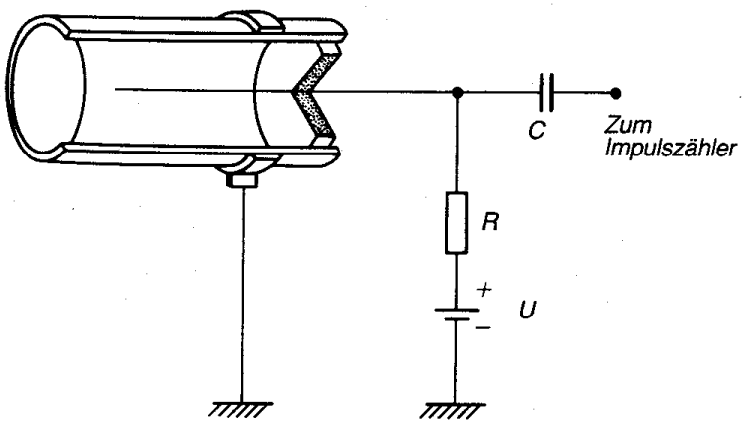


Abbildung 6.1: Geiger-Müller-Zählrohr

6.1.3 Nachweis der Kernstrahlung mit Hilfe eines Geiger-Müller-Zählrohres

Ein Geiger-Müller-Zählrohr besteht im Prinzip aus zwei Elektroden, einem zumeist zylindrischen Rohr und einem in der Achse des Rohres gespannten Draht (Abb. 6.1).
Beim Durchgang von α-, β- und γ-Strahlen wird das Füllgas (meistens ein Edelgas) ionisiert. Die Elektronen wandern im angelegten Feld zum Draht und die positiven Ionen zur Wand. Das Zählrohr kann als geladener Kondensator aufgefasst werden. Die Ladungsverschiebung durch die wandernden Elektronen und Ionen erzeugt an der Anode einen negativen Spannungspuls, der verstärkt, invertiert und registriert wird. In einem gegebenen Strahlungsfeld hängt die Impulsrate, die ein Geiger-Müller-Zählrohr angibt, von der angelegten Spannung ab (Abb. 6.2). Unterhalb der Schwellenspannung U_S kann keine Entladung ausgelöst werden. Die Schwellenspannung ist abhängig von der Energie der Teilchen. Oberhalb der Einsatzspannung U_E ist die Zählrate nicht mehr von der Energie der Teilchen abhängig und in einem bestimmten Bereich („Plateau“) von der Zählrohrspannung unabhängig. Die Betriebsspannung U_B wird im Plateaubereich gewählt.

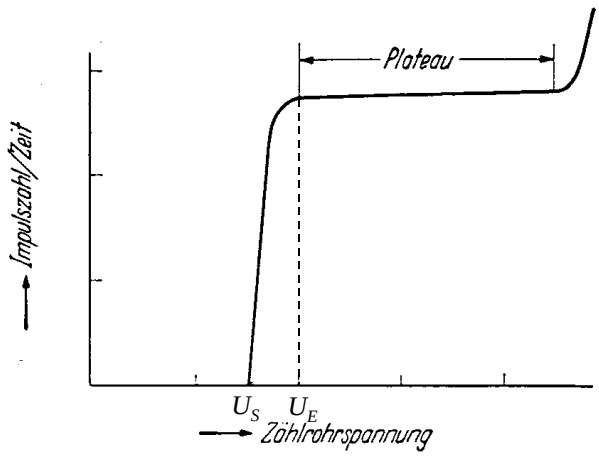


Abbildung 6.2: Charakteristik eines Geiger–Müller–Zählrohrs. U_S: Schwellenspannung; U_E: Einsatzspannung.

6.2 Aufgaben

6.2.1 1. Halbtag

1. Was für Strahlen emittieren die im Praktikum vorhandenen Quellen? Welche Energie haben die emittierten Teilchen (bei β-Strahlen E_{max} angeben)? (vgl. Anhang)

2. Stellen Sie die Differentialgleichung für den Mutter–Tochter-Zerfall von $^{90}\mathrm{Sr} \rightarrow {}^{90}\mathrm{Y} \rightarrow {}^{90}\mathrm{Zr}$ auf und lösen Sie sie unter der Annahme, dass $N_{\mathrm{Sr}}(t=0) = N_{\mathrm{Sr}}(0)$, $N_{\mathrm{Y}}(t=0) = 0$. Tragen Sie $A_{\mathrm{Sr}}(t)$ und $A_{\mathrm{Y}}(t)$ auf und diskutieren Sie das Ergebnis. Wann ist $A_{\mathrm{Sr}} = A_{\mathrm{Y}}$?

3. Bestimmen Sie die Einsatzspannung des Zählrohrs mit Hilfe einer γ- und einer β-Quelle. Die Einsatzspannung sollte in beiden Fällen gleich sein. Messen Sie einige Punkte im Plateau ($U \leq U_E + 100\,\mathrm{V}$). Die Zählrate sollte wegen Zählverlusten (Totzeit!) nie mehr als $50\,\mathrm{s}^{-1}$ betragen. Stellen Sie die Zählrohrcharakteristik graphisch dar (mit den statistischen Fehlern).

4. Nehmen Sie bei der Betriebsspannung $U_B = U_E + 20\,\mathrm{V}$ zwei Poissonverteilungen gemäss folgender Anleitung auf:

   (a) In 5 s sollen ca. 2 Impulse gezählt werden. Bei einigen Zählrohren genügt dazu schon der Nulleffekt, bei den andern variiert man den Abstand der Quelle vom Rohr und die Absorberdicke so lange, bis man die richtige Rate hat. Messen Sie ca. 100 mal 5 s lang und tragen Sie die Resultate direkt auf Häuschenpapier auf.

   (b) Dasselbe wie oben, nur sollen jetzt im Mittel ca. 10 Impulse in 5 s gezählt werden.

6.2.2 2. Halbtag

1. Messen Sie die Einsatzspannung Ihres Zählrohres.

2. Messen Sie bei der Betriebsspannung den Nulleffekt auf 5% genau. Der Nulleffekt hat folgende Ursachen:

   (a) Kosmische Strahlung;

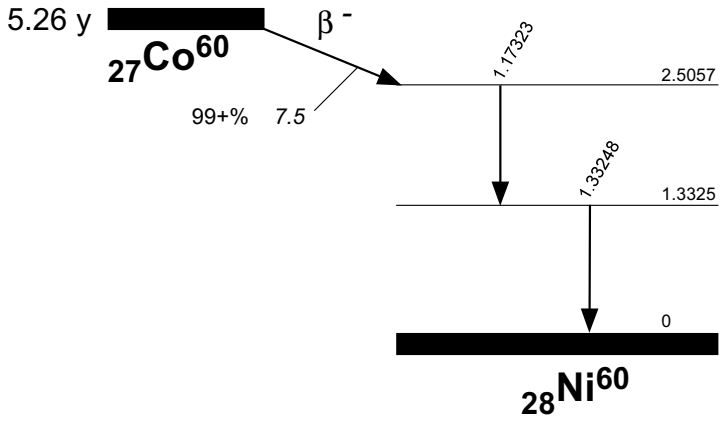
   (b) Umgebungsstrahlung und Strahlung aus Zählrohrmaterial von natürlich vorkommenden oder künstlichen instabilen Isotopen (z.B. ^{40}K).

3. Messen Sie die Absorption der Strahlung der ^{60}Co-Quelle durch Blei. Variieren Sie die Absorberdicke in geeigneten Schritten bis zu einer Absorberdicke von 30 mm. Stellen Sie die Netto-Zählrate (gemessene Rate minus Nulleffekt) auf halblogarithmischem Papier graphisch dar. Tragen Sie bei jedem Punkt den statistischen Fehler der Netto-Zählrate ein. Geben Sie eine kurze Interpretation der Messresultate und berechnen Sie den Massenabsorptionskoeffizienten μ/ρ; vergleichen Sie diesen mit den Werten in Anhang 6.4.

4. Messen Sie die Absorption der Strahlung aus der $^{90}\mathrm{Sr}/^{90}\mathrm{Y}$-Quelle durch Aluminium. Stellen Sie die Netto-Zählrate mit statistischem Fehler auf halblogarithmischem Papier graphisch dar und geben Sie eine kurze Interpretation der Messresultate.

Anhang

6.3 Auszüge aus der Isotopentabelle



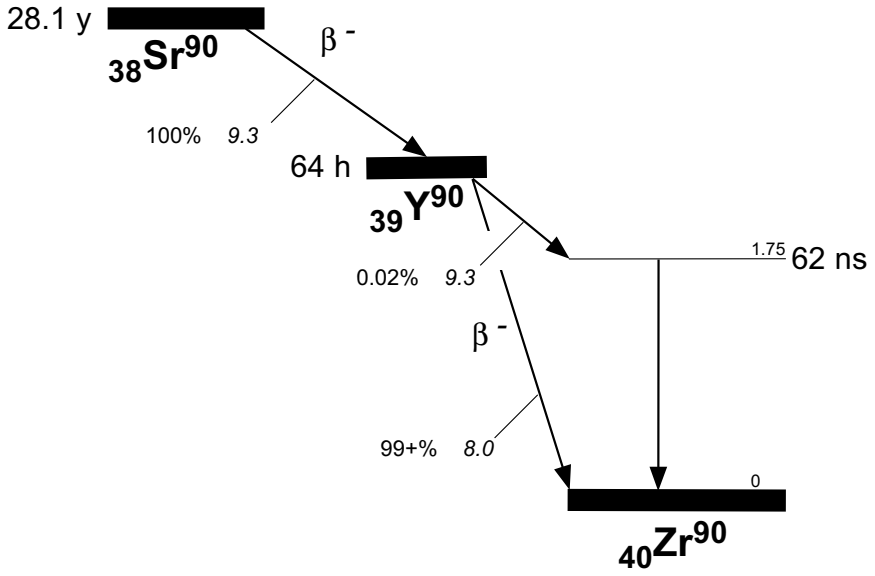


Abbildung 6.3: Auszüge aus der Isotopentabelle (aus: Lederer, Hollander, Perlmann: Table of isotopes)

6.4 Massenabsorptionskoeffizient von Blei

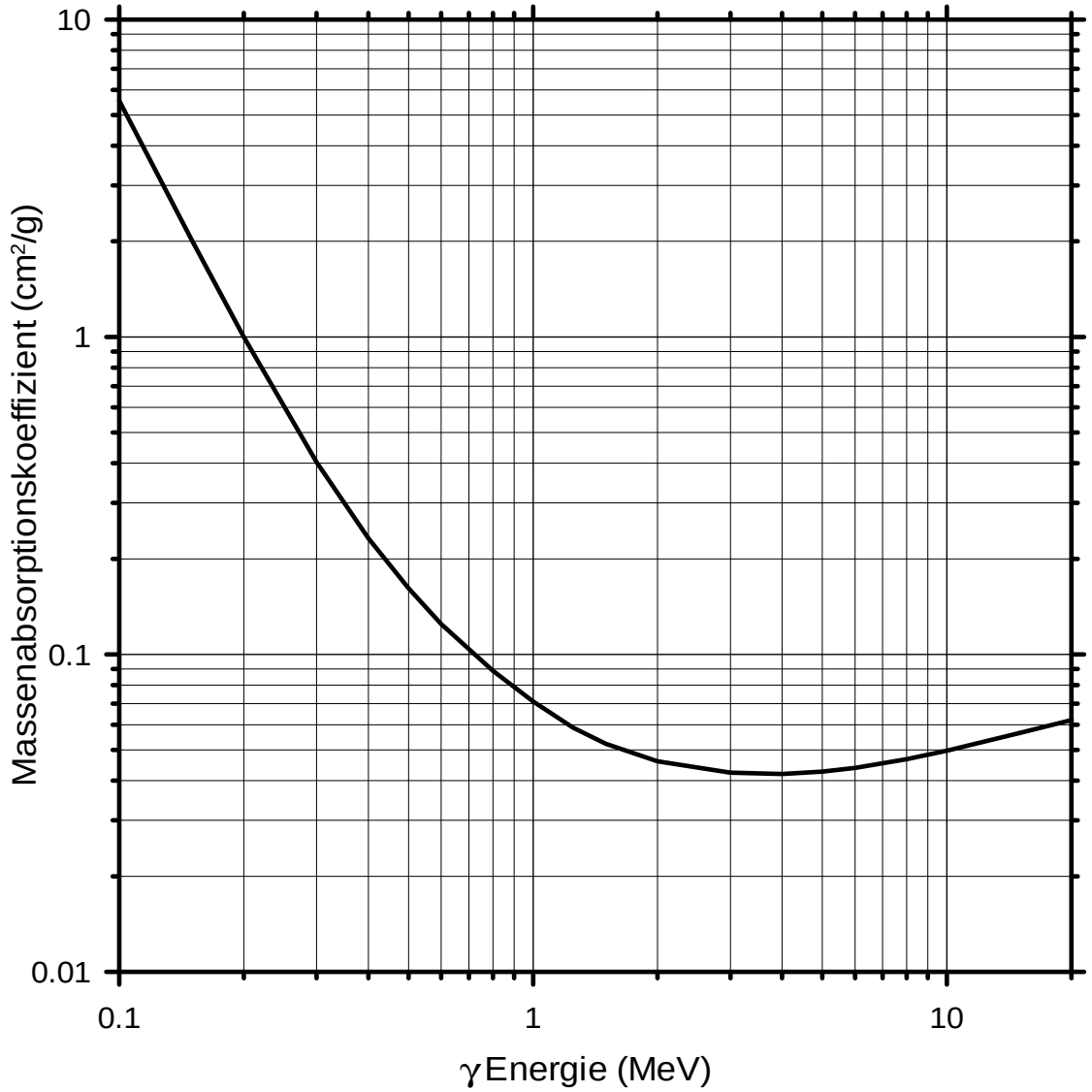


Abbildung 6.4: Massenabsorptionskoeffizient von Blei. Quelle: National Institute of Standards and Technology; http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/ cover.html

6.5 χ^2-Verteilung

f	$\chi^2_{1-0.05}$	f	$\chi^2_{1-0.05}$
3	7.8	17	27.6
4	9.5	18	28.9
5	11.1	19	30.1
6	12.6	20	31.4
7	14.1	21	32.7
8	15.5	22	33.9
9	16.9	23	35.2
10	18.3	24	36.4
11	19.7	25	37.7
12	21.0	26	38.9
13	22.4	27	40.1
14	23.7	28	41.3
15	25.0	29	42.6
16	26.3	30	43.8

Tabelle 6.1: χ^2-Verteilung

6.6 Einheiten der Radioaktivität und des Strahlenschutzes

6.6.1 Aktivität

Unter der Aktivität A eines radioaktiven Stoffes versteht man die Anzahl der Zerfälle pro Zeiteinheit.
SI-Einheit der Aktivität: 1 Becquerel = 1 Bq = 1 Zerfall/s.
Veraltete Einheit: 1 Curie = 1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq

6.6.2 Absorbierte Dosis

Die absorbierte Dosis (Energiedosis) D gibt die in einem Masseelement $dm = \rho\, dV$ absorbierte Energie dE an. Somit ist $D = \frac{dE}{dm}$. Die Definition dieser Grösse ist unabhängig von der Art der Wechselwirkung der Strahlung und dem Absorbermaterial.
SI-Einheit der Dosis: 1 Gray = 1 Gy = 1 J/kg.
Veraltete Einheit: 1 Rad (Radiation absorbed dose) = 1 rd = 0.01 GY

6.6.3 Ionendosis

Unter der Ionendosis J versteht man die pro kg trockene Luft erzeugte Ladungsmenge eines Vorzeichens.
SI-Einheit der Ionendosis: 1 Coulomb/kg = 1 C/kg.
Veraltete Einheit: 1 Röntgen = 1 R = $2.58 \cdot 10^{-4}$ C/kg.

6.6.4 Äquivalentdosis

Die Äquivalentdosis H in einem Gewebe oder Organ T ist die Energiedosis in diesem Gewebe oder Organ, multipliziert mit dem Strahlungs-Wichtungsfaktor w_R für die betreffende Strahlungsart ($H = w_R\, D$). Strahlungen mit hoher Ionisationsdichte (α-Teilchen, Sekundärprotonen bei Neutronenbestrahlung) haben bei gleicher absorbierter Dosis eine stärkere biologische Wirkung als die Strahlungen mit niedriger Ionisationsdichte (Röntgen, γ, β). Grosse Ionisationsdichte zerstört das durchstrahlte Material sehr stark.
SI-Einheit der Aequivalentdosis: 1 Sievert = 1 Sv.
Veraltete Einheit: 1 rem (radiation equivalent for man) = 0.01 Sv.
Einige Beispiele für den Strahlungs-Wichtungsfaktor w_R:

Röntgen, γ, Müonen, β	1
Protonen	10
Neutronen	5 - 15
α, Spaltprodukte, schwere Kerne	20

(In der Literatur sind z.T. leicht voneinander abweichende Werte zu finden.)

6.6.5 Effektive Dosis

Die einzelnen Organe und Gewebe des Menschen haben verschiedene Strahlungsempfindlichkeit. Den einzelnen Organen werden daher Gewebe-Wichtungsfaktoren w_T zugeteilt. Die Summe aller so gewichteten Äquivalentdosen ist die effektive Dosis E (früher effektive Äquivalentdosis).

$$E = \sum_{Organ\, T} w_T \cdot \sum_{Strahlungsart\, R} w_R \cdot D_R \tag{6.7}$$

6.7 Durch Strahlung verursachte biologische Schäden

a) Genetische Schäden: Veränderung der Gene in den Erbzellen = Mutation (Änderung der Reihenfolge der Basen in der Nukleinsäure).
b) Somatische Schäden: z.B. Kataraktbildung im Auge; Rötung der Haut (sehr schwer heilend). Zellen sind besonders empfindlich während der Teilung (Foetus).
Biologische Wirkung einer einmaligen Ganzkörperbestrahlung (Röntgenstrahlen):

$< 0,25$ Sv	keine akuten Strahlenschäden
1 Sv	Strahlenkrankheit
> 5 Sv	letal (tödlich) in fast allen Fällen

6.8 Strahlenschutz und natürliche Strahlenbelastung

Vorschriften betreffend Strahlenschutz findet man in der Strahlenschutzverordnung 1994 des Bundes (http://www.admin.ch/ch/d/sr/c814_501.html). Von den folgenden Grenzwerten ausgenommen sind die natürlichen Dosisbeiträge und die Anwendungen ionisierender Strahlung in der Medizin; Radon ist ebenfalls natürlichen Ursprunges.

- für beruflich strahlenexponierte Personen gilt:

  - 20 mSv pro Jahr effektive Dosis darf nicht überschritten werden;
  - die Grenzwerte der Äquivalentdosis sind 150 mSv pro Jahr für die Augenlinse und 500 mSv pro Jahr für Haut, Hände und Füsse.
  - besondere Regelungen gelten für junge Personen und Frauen.
- für nichtberuflich strahlenexponierte Personen gilt der Grenzwert für die effektive Dosis von 1 mSv pro Jahr.

In Tabelle 6.2 ist die durchschnittliche Strahlenbelastung der Bevölkerung in der Schweiz für das Jahr 1997 zusammengestellt (aus: Umweltradioaktivität und Strahlendosen in der Schweiz, Bundesamt für Gesundheit, 1997).
Beim Vergleich zwischen den medizinisch bedingten und den natürlichen Strahlenbelastungen muss berücksichtigt werden, dass in der Medizin wesentlich höhere Dosisleistungen zur Anwendung kommen, so dass deren Wirksamkeit im Vergleich zur Wirkung der natürlichen Strahlung grösser sein kann.

	Effektive Dosis [mSv/yr]	Schwankungsbereich [mSv/yr]
Natürliche Quellen		
externe Strahlung (terrestrische und kosmische Strahlung	0.9	0.5 - 2
Radon und Folgeprodukte	1.6	0.3 - $>$ 20
Nahrung (v.a. ^{40}K)	0.4	0.2 - 0.5
Total	2.9	
Künstliche Quellen		
Röntgendiagnostik	1	
Nuklearmedizin	0.04	
Leuchtziffern, TV, Rauchen	0.1	
beruflich Strahlenexponierte	20	
Nuklearindustrie, KKW, Tschernobyl, Kernwaffentests	0.2	
Durchschnittliche Gesamtdosis	**4**	

Tabelle 6.2: Natürliche und künstliche radioaktive Quellen.

Literaturverzeichnis

[1] Gerthsen, Kneser, Vogel: Physik, ODA 206

[2] Mayer-Kuckuck: Kernphysik, RDA 143

[3] Povh, Rith, Scholz, Zetsche: Teilchen und Kerne

[4] Lederer, Hollander, Perlmann: Table of isotopes, REA 121

[5] Tipler: Physik, ODA 208

[6] Firestone, Shirley: Table of isotopes, REA 201, http://ie.lbl.gov/toi.html, http://t2.lanl.gov/ oder http://www.nndc.bnl.gov/

[7] Skript: „Statistische Verteilungen“

Kapitel 7

Elektronik I: Passive Schaltungen

In diesem Praktikumsversuch sollen die Grundkenntnisse von passiven elektronischen Schaltungen erarbeitet werden. Ziel ist es, mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen vertraut zu werden und einfache Schaltungen verstehen zu lernen. Im weiteren soll die Handhabung von modernen Speicheroszilloskopen und Frequenzgeneratoren erlernt werden. Das zweite Elektronikpraktikum wird auf den hier erarbeiteten Kenntnissen aufbauen.

7.1 Theorie

Der Theorieteil ist vor dem Praktikumsnachmittag zu lesen und die darin gestellten Aufgaben zu lösen.

7.1.1 Der elektrische Widerstand

Wird über einen Leiter eine zeitlich konstante Spannung U angelegt, dann fließt im Leiter der Strom I. Der elektrische Widerstand R des Leiters wird dann definiert durch: $R = U/I$. Im allgemeinen Fall ist der elektrische Widerstand eines Leiters abhängig vom Strom, der durch ihn fließt. Man kann dann auch den differentiellen Widerstand $r = \partial U/\partial I$ angeben. Ist ein Widerstand in einem Gleichstromnetzwerk stromunabhängig, dann heisst R Ohm' scher Widerstand und es gilt das Gesetz von Ohm: $U = R \cdot I$, wo R eine Konstante ist. Metallische Leiter sind bei konstant gehaltener Temperatur in guter Näherung Ohm' sche Widerstände.

7.1.2 Der Kondensator

Ein Kondensator ist ein Schaltelement, das sich durch die Eigenschaft auszeichnet, elektrische Ladung zu speichern. Dieses Speichervermögen nennt man Kapazität C des Kondensators. Sie charakterisiert den Kondensator vollständig und wird folgendermaßen definiert:

$$C = \frac{Q}{U}, \qquad [C] = \mathrm{F} = \mathrm{Farad} \tag{7.1}$$

Q ist die gespeicherte Ladung und U ist die Spannung über dem Kondensator. In der Elektrotechnik ist es üblich, zeitabhängige Größen mit kleinen Buchstaben und zeitlich konstante Größen mit großen Buchstaben zu bezeichnen. Somit kann die Ladung des Kondensators durch den in ihm fließenden Strom ausgedrückt werden:

$$q(t) = \int_0^t i(t')dt', \qquad [q(t)] = \mathrm{C} = \mathrm{Coulomb}. \tag{7.2}$$

Gleichung (7.2) beinhaltet die Randbedingung, daß der Kondensator zur Zeit $t = 0$ ungeladen ist. Mit Gleichung (7.1) ergibt sich somit für die Spannung über dem Kondensator

$$u(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt', \qquad [u(t)] = \mathrm{V} \tag{7.3}$$

und damit

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{C}i(t). \tag{7.4}$$

In einem Kondensator fließt also nur dann ein Strom, wenn sich die angelegte Spannung ändert. Dies bringt uns in das Gebiet des Wechselstroms. Es stellt sich auch die Frage, wie

der elektrische Widerstand eines Kondensators zu definieren sei. Gleichung (7.4) läßt uns vermuten, daß der Widerstand umso kleiner wird, je stärker sich die Spannung zeitlich ändert, doch dies wird später noch ausführlicher behandelt werden. Mit Gleichung (7.4) kann auch die im Kondensator gespeicherte Energie berechnet werden:

$$W_C = \frac{CU^2}{2}, \qquad [W_C] = \mathrm{J} \tag{7.5}$$

Aufgabe 1: Leiten Sie Gleichung (7.5) her.

7.1.3 Die Spule

Beginnt ein Strom durch eine Spule zu fließen, wird ein Magnetfeld aufgebaut und somit Energie gespeichert. Wird der Strom nun verkleinert und somit das Magnetfeld abgebaut, wird die gespeicherte Energie wieder frei. Dies geschieht, indem eine Spannung induziert wird, die den Strom aufrecht zu erhalten versucht. Diese induzierte Spannung ist proportional zur Stromänderung:

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) = L \cdot \dot{i}(t). \tag{7.6}$$

Der Proportionalitätsfaktor L heißt Induktivität der Spule und wird in der Einheit H (= Henry) angegeben. Eine Spule gibt dem Strom also eine gewisse „Trägheit“. Die gespeicherte Energie ist proportional zum Quadrat des Stromes, der durch die Spule fließt:

$$W_L = \frac{LI^2}{2}, \qquad [W_L] = \mathrm{J}. \tag{7.7}$$

7.1.4 Komplexe Darstellung von Wechselspannungen und -strömen

Zur Darstellung zeitabhängiger Größen verwenden wir Kleinbuchstaben und für zeitunabhängige Größen Großbuchstaben. Dies entspricht der in der Elektronik allgemein üblichen Notation. Wechselspannungen und -ströme werden meist durch Sinusfunktionen dargestellt:

$$u(t) = \hat{U} \cdot sin(\omega t + \phi) \qquad \text{bzw.} \qquad i(t) = \hat{I} \cdot sin(\omega t + \phi) \tag{7.8}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{U}, \hat{I} &= \text{Scheitelwerte} \\ \omega &= \text{Kreisfrequenz} \\ \phi &= \text{Phase} \end{aligned}$$

Diese Sinusfunktionen können nun durch komplexwertige Exponentialfunktionen ersetzt werden, womit sich sich diese Schaltungen sehr einfach berechnen lassen:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \phi)} \\ &= \hat{U} \cdot e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t} \\ &= \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \\ &= \underline{\hat{U}} \cdot cos(\omega t) + j \cdot \underline{\hat{U}} \cdot sin(\omega t) \end{aligned} \tag{7.9}$$

In der Elektronik wird j an Stelle des in der Mathematik gebräuchlichen i als Symbol für die imaginäre Einheit verwendet, um Verwechslungen mit der Stromstärke vorzubeugen. Der Übersicht halber sind in diesem Skriptum komplexwertige Variablen unterstrichen dargestellt.

Die Phase ϕ kann also in die komplexwertige Amplitude $\underline{\hat{U}}$ einbezogen werden, wobei gilt:

$$|\underline{\hat{U}}| = |\hat{U} \cdot e^{j\phi}| = \hat{U} \tag{7.10}$$

Die Einschränkung auf sinusförmige Ströme und Spannungen ist keine wirkliche Einschränkung, denn eine beliebige periodische Funktion kann in ihre Fourierkomponenten entwickelt werden, welche dann einzeln untersucht werden können. Nichtperiodische Funktionen werden mittels Fouriertransformation in ein Frequenzspektrum zerlegt und weiterbearbeitet. Mit der komplexen Darstellung erhält man auf einfache Art die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom bei Schaltungen, die Kapazitäten und Induktivitäten enthalten, wie in den nächsten Kapiteln gezeigt werden wird. Zudem läßt sich der elektrische Widerstand, wie er in Kapitel 7.1.1 definiert wurde, direkt für Wechselströme verallgemeinern.

7.1.5 Rechenregeln für komplexe Zahlen

Bevor wir nun daran gehen einfache Schaltungsnetzwerke zu berechnen, wollen wir die wichtigsten Rechenregeln für komplexe Zahlen wiederholen. Die komplexe Zahl Z ist in diesem Kapitel nicht unterstrichen.

Gegeben ist die komplexe Zahl $Z = R + j \cdot X$, dann heißt

$\overline{Z}$	$=$	$R - jX$			konjugiert Komplexes,
R	$=$	$\mathrm{Re}(Z)$	$=$	$\lvert Z\rvert \cdot \cos\phi$	Realteil,
X	$=$	$\mathrm{Im}(Z)$	$=$	$\lvert Z\rvert \cdot \sin\phi$	Imaginärteil,
$\tan\phi$	$=$	$\frac{\mathrm{Im}(Z)}{\mathrm{Re}(Z)}$			Phasenwinkel und
$\lvert Z\rvert$	$=$	$\sqrt{R^2 + X^2}$			Betrag von Z.

Weiter gilt:

$Z \cdot \overline{Z}$	$=$	$\lvert Z\rvert^2$	
$\frac{1}{j}$	$=$	$-j$	
$\overline{Z_1 + Z_2}$	$=$	$\overline{Z_1} + \overline{Z_2}$	
$\overline{Z_1 \cdot Z_2}$	$=$	$\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$	
$\lvert Z_1 \cdot Z_2\rvert$	$=$	$\lvert Z_1\rvert \cdot \lvert Z_2\rvert$	gilt nicht für die Addition
$\left\lvert \frac{Z_1}{Z_2} \right\rvert$	$=$	$\frac{\lvert Z_1\rvert}{\lvert Z_2\rvert}$	

Aufgabe 2: Beweisen Sie die letzte Gleichung.

Brüche komplexer Zahlen erweitert man oft mit dem konjugiert Komplexen des Nenners, um

reelwertige Nenner zu erhalten, wa weitere Berechnungen vereinfacht:

$$\begin{aligned}\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{R_1 + jX_1}{R_2 + jX_2} \\ &= \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 - jX_2)}{(R_2 + jX_2)(R_2 - jX_2)} \\ &= \frac{R_1R_2 + X_1X_2 + j(-R_1X_2 + R_2X_1)}{({R_2}^2 + {X_2}^2)} \quad = \quad R + jX\end{aligned}$$

7.1.6 Kapazität im Wechselstromkreis

Als erstes Beispiel berechnen wir in komplexer Darstellung den Strom, der in einem Kondensator fließt, wenn eine Wechselspannung $\underline{u}(t) = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t}$ über dem Kondensator anliegt. Aus Gleichung (7.4) erhalten wir:

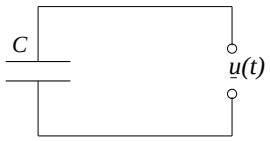


Abbildung 7.1: Kondensator

$$\begin{aligned}\underline{i}(t) &= C \cdot \frac{d}{dt}\underline{u}(t) \\ &= C \cdot j\omega \cdot \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \quad = \quad \underline{\hat{I}} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{, wobei} \quad \underline{\hat{I}} = \underline{\hat{U}} \cdot j\omega C \\ &= j\omega C \cdot u(t) \\ &= \omega C \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \\ &= \omega C \cdot \underline{\hat{U}} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}\end{aligned} \tag{7.11}$$

Der Faktor $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$ bedeutet offenbar eine Phasenverschiebung des Stromes um $+\frac{\pi}{2}$ $(= 90°)$ gegenüber der Spannung, d.h. der Strom eilt der Spannung um $\frac{\pi}{2}$ voraus.

7.1.7 Induktivität im Wechselstromkreis

Auf analoge Weise erhalten wir die Spannung an einer Indkutivität, durch die ein Strom $\underline{i} = \underline{\hat{I}} \cdot e^{j\omega t}$ fließt. Aus Gleichung (7.6) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{u}(t) &= L \cdot \frac{d}{dt}\underline{i}(t) \\ &= L \cdot j\omega \cdot \underline{\hat{I}} \cdot e^{j\omega t} \\ &= j\omega L \cdot \underline{i}(t) \\ &= \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{, wobei} \quad \underline{\hat{U}} = \underline{\hat{I}} \cdot j\omega L\end{aligned} \tag{7.12}$$

Bei vorgegebener Spannung $\underline{u}(t) = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t}$ wird

$$\begin{aligned} \underline{i}(t) &= \frac{\underline{u}(t)}{j\omega L} \\ &= \frac{\underline{u}(t)}{\omega L} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Der Faktor $\frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ bedeutet eine Phasenverschiebung des Stromes um $-\frac{\pi}{2}$ $(= -90°)$ gegenüber der Spannung, d.h. der Strom folgt der Spannung mit einem Phasenwinkel von $\frac{\pi}{2}$ nach.

7.1.8 Widerstand im Wechselstromkreis

Analog zum Ohm' schen Widerstand im Gleichstromkreis kann der Wechselstromwiderstand im Wechselstromkreis definiert werden:

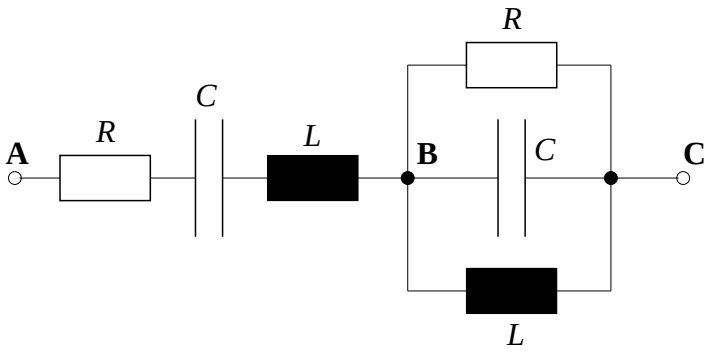
$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}, \quad [\underline{Z}] = \Omega = \text{Ohm}. \tag{7.14}$$

Z ist im allgemeinen Fall komplexwertig und wird in der Elektronik Impedanz genannt. Die oben behandelten Bauelemente haben folgende Impedanzen, wie durch Einsetzen der Spannungen und Stromstärken von Gleichung (7.11) bzw. Gleichung (7.12) in Gleichung (7.14) leicht nachgerechnet werden kann:

$\underline{Z}_R$	=	R	ohmscher Widerstand
$\underline{Z}_C$	=	$\frac{1}{j\omega C}$	kapazitiver Widerstand
$\underline{Z}_L$	=	$j\omega L$	induktiver Widerstand

Die Impedanzen im Wechselstromkreis können nun genau gleich behandelt werden, wie Widerstände im Gleichstromkreis, d.h. serielle Impedanzen werden einfach addiert, parallele Impedanzen invers addiert.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Impedanzen zwischen **A** und **B, B** und **C** und **A** und **C** .



7.1.9 Verstärkung im Wechselstromkreis

Abbildung 7.2 zeigt das Schaltbild eines Vierpols. Ein Vierpol ist eine Schaltung, bei der an zwei Polen eine Eingangsspannung $\underline{u}_{in}$ angelegt werden kann und an den anderen zwei Polen eine Ausgangsspannung $\underline{u}_{out}$ abgegriffen werden kann.

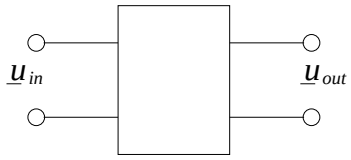


Abbildung 7.2: Vierpol

Für einen Vierpol definieren wir die komplexe Verstärkung wie folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{V} &= \frac{\underline{u}_{out}(t)}{\underline{u}_{in}(t)} \\
&= \frac{\hat{U}_{out} \cdot e^{j(\omega t+\phi_{out})}}{\hat{U}_{in} \cdot e^{j(\omega t+\phi_{in})}} \\
&= \frac{\hat{U}_{out}}{\hat{U}_{in}} \cdot e^{j(\phi_{out}-\phi_{in})} \\
&= |\underline{V}| \cdot e^{j(\phi_{out}-\phi_{in})} \\
&= |\underline{V}| \cdot e^{j\phi}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

ϕ ist die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal. Eilt die Ausgangsspannung der Eingangsspannung voraus, ist ϕ positiv. Für den Betrag der Verstärkung schreiben wir einfach $|\underline{V}| = V$. In der Elektrotechnik wird die Verstärkung fast ausschließlich in logarithmischer Größe angegeben. Statt V schreiben wir dann V^*:

$$\boxed{V^* = 20 \cdot \log \frac{\hat{U}_{out}}{\hat{U}_{in}} = 20 \cdot \log V,} \quad [V^*] = \text{dB} = \text{dezibel}. \tag{7.16}$$

Bei passiven Schaltungen gilt immer $U_{out} < U_{in}$, d.h. die Verstärkung V^* ist immer negativ. Darum wird manchmal die Dämpfung A^* (engl.: attenuation) definiert, die dann positiv ist:

$$A^* = -20 \cdot \log \frac{\hat{U}_{out}}{\hat{U}_{in}} = -20 \cdot \log V, \quad [A^*] = \text{dB}. \tag{7.17}$$

Wir werden sehen, daß die Verstärkung einer komplexen Schaltung frequenzabhängig ist. Die Frequenz, bei der die Verstärkung $V = 1/\sqrt{2}$ beträgt, heißt **Grenzfrequenz** ν_g. Bei der Grenzfrequenz ist die Leistung des Ausgangs auf die Hälfte abgesunken, da die Leistung proportional zu U^2 ist. Weiterhin beträgt die Verstärkung bei der Grenzfrequenz in der Dezibel–Skala $V^* \approx -3\text{dB}$ oder die Dämpfung $A^* \approx 3\text{dB}$.

7.1.10 Anwendung auf Grundschaltungen

Der Tiefpaß

Das Schaltbild eines Tiefpasses ist in Abbildung 7.3 widergegeben. Der Tiefpaß überträgt tiefe Frequenzen unverändert. Für hohe Frequenzen hingegen, wird der Kondensator leitend und

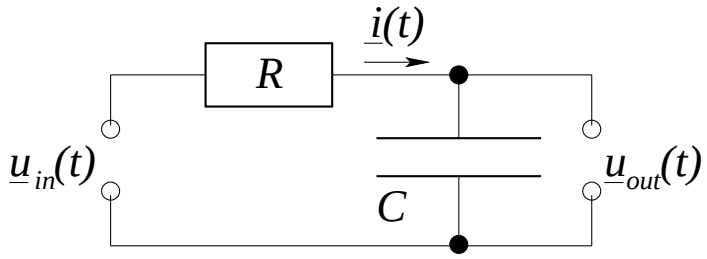


Abbildung 7.3: Einfachster Tiefpaß

die Ausgangsspannung entsprechend abgeschwächt. Darum werden hohe Frequenzen gedämpft und phasenverschoben. Der Tiefpaß hat auch eine integrierende Eigenschaft, wie auch aus Gleichung (7.3) zu erkennen ist. Dies ist jedoch nicht mit dem Integrator (Operationsverstärkerschaltung) zu verwechseln. Wir wollen nun die Dämpfung dieses Tiefpasses berechnen. Da Widerstand und Kondensator in Serie geschaltet sind, ist der Strom im Stromkreis (wenn kein Strom über den Ausgang abfließt):

$$\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}_{in}(t)}{\underline{Z}_{tot}} = \frac{\underline{u}_{in}(t)}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \tag{7.18}$$

Mit diesem Strom wird die Spannung über dem Kondensator berechnet:

$$\underline{u}_{out}(t) = \underline{Z}_C \cdot \underline{i}(t) \tag{7.19}$$

Die Verstärkung wird also

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \frac{\underline{u}_{out}(t)}{\underline{u}_{in}(t)} \\ &= \frac{\underline{Z}_C \cdot \underline{i}(t)}{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_R) \cdot \underline{i}(t)} \qquad \text{(Spannungsteilergesetz)} \\ &= \frac{\underline{Z}_C}{(\underline{Z}_C + \underline{Z}_R)} \\ &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \qquad = \qquad \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \end{aligned} \tag{7.20}$$

Daraus ergeben sich Betrag und Phase der Verstärkung:

$$\boxed{V = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \qquad \text{bzw.} \qquad \phi = arctan(-\omega RC)} \tag{7.21}$$

Beide Größen sind frequenzabhängig. Die **Grenzkreisfrequenz** erhalten wir aus

$$V_g = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + {\omega_g}^2 R^2 C^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_g = \frac{1}{RC} = 2\pi \cdot \nu_g} \tag{7.22}$$

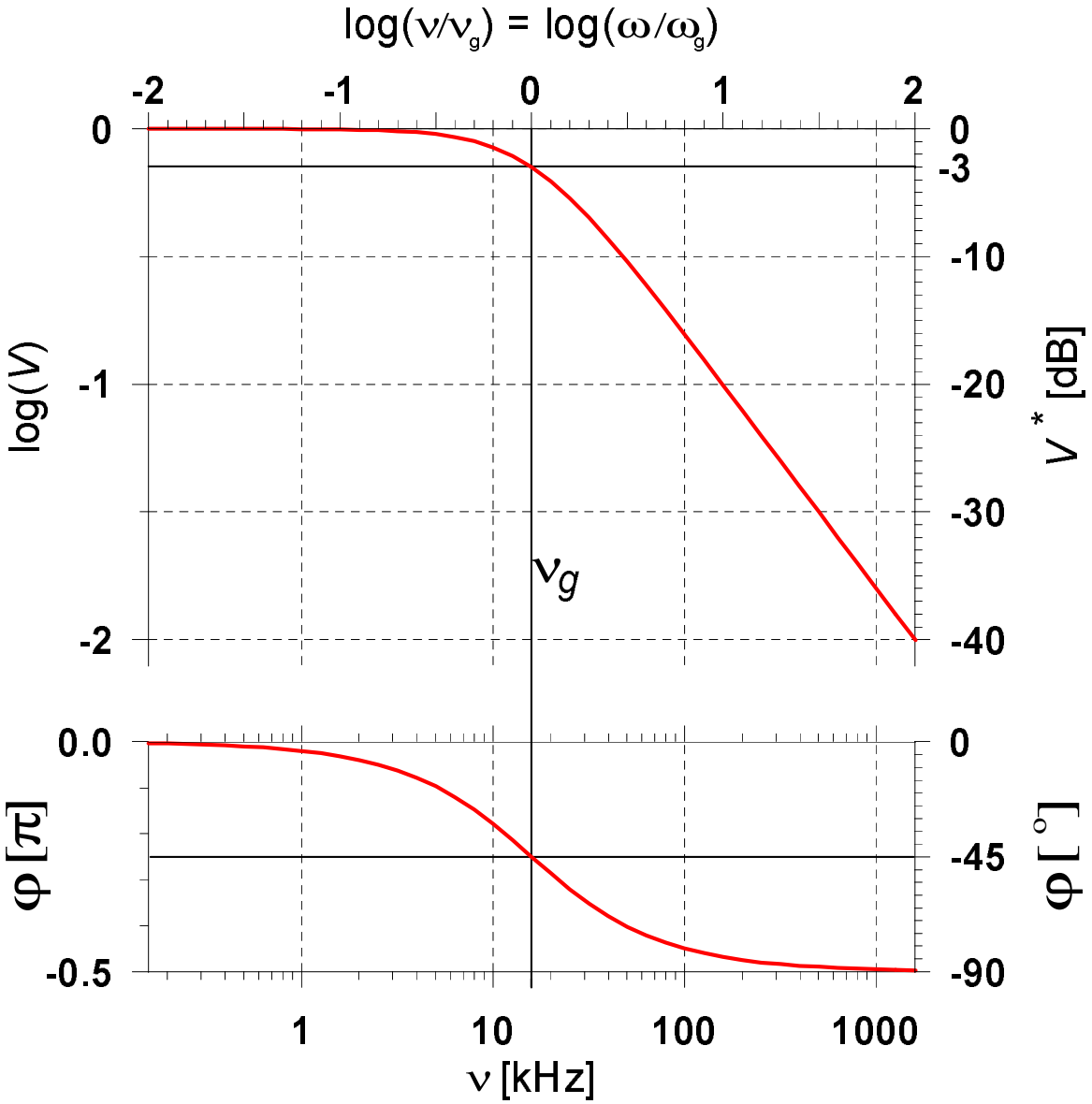


Abbildung 7.4: Bode–Diagramm des Tiefpasses für $RC = 10^{-5}$s. Die obere Kurve zeigt den Frequenzgang des Betrages der Verstärkung, die untere Kurve den der Phase. Die Grenzfrequenz ist ebenfalls eingezeichnet. Beachte ausserdem die Beschriftungen der logarithmischen Achsen. Im Falle von $\log(V)$ besteht kein Problem, da V eine dimensionslose Größe ist. Da man eine dimensionsbehaftete Größe nicht logarithmieren sollte, wurde bei der oberen x–Achse durch eine Einheit der entsprechenden Dimension dividiert und dann erst logarithmiert. Bei der unteren x–Achse wurde dieses Problem umgangen, indem nicht die aufzutragenden Wert logarithmiert wurden, sondern nur die Achse logarithmisch eingeteilt wurde. Bei der Interpretation der unteren y–Achse ist eine gewisse Vorsicht geboten: der Maximalwert bei 0.5 bedeutet $0.5 \cdot \pi = 90°$.

Die Dämpfung für $\omega < \omega_g$ ist vernachlässigbar. Für $\omega > \omega_g$ steigt die Dämpfung rasch an. Somit kann man mit einem Tiefpaß unerwünschte Frequenzen **oberhalb der Grenzfrequenz** dämpfen, man spricht von einem **Filter**. Die Phasenverschiebung bei der Grenzfrequenz ist

$$\boxed{\phi_g = \arctan(-\omega_g \cdot RC) = -45°.} \tag{7.23}$$

Dämpfung und Phasenverschiebung des RC-Tiefpasses sind in Abbildung 7.4 in einem sogenannten **Bode–Diagramm** dargestellt. Frequenz und Dämpfung sind darin, wie in der Elektronik üblich, logarithmisch dargestellt. Die Dämpfung ist, wie bereits erwähnt, für $\omega < \omega_g$ klein, insbesondere da die menschlichen Sinne logarithmisch wahrnehmen. Die Asymptote für hohe Frequenzen kann mit Gleichung 7.21 bestimmt werden.

$$\begin{aligned} V &\approx \frac{1}{\omega RC}, && \omega > \omega_g \\ V^* &= 20 \cdot \log(V) \approx -20 \cdot \log(\omega RC), && \omega > \omega_g \end{aligned} \tag{7.24}$$

Einsetzen der Grenzkreisfrequenz nach Gleichung 7.22 ergibt:

$$V^* \cong -20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = -20 \cdot \log(\omega) + 20 \cdot \log(\omega_g), \qquad \omega > \omega_g. \tag{7.25}$$

Die Steigung dieser Asymptote erhalten wir durch differenzieren von V^* nach $\log(\omega)$:

$$m = \frac{\partial V^*}{\partial \log(\omega)} = -20 \text{ dB/Dekade}. \tag{7.26}$$

Die Einheit dB/Dekade kommt zustande, weil die Vergrößerung des Nenners um eine Einheit einer Verzehnfachung (Dekade) de Kreisfrequenz entspricht:

$$\log(\omega) + 1 = \log(10 \cdot \omega) \tag{7.27}$$

Eine Einheit der oberen (linearen) x–Achse, ist also gleich einer „Frequenzdekade“. Filter, welche heutzutage in der Elektronik verwendet werden, bestehen aus komplizierten Schaltungen und haben Flankensteilheiten von 80–120dB/Dekade.

Aufgabe 4: Wieviele dB/Oktave sind −20dB/Dekade (Oktave = Frequenzverdopplung)?

Der Hochpaß

Der Hochpaß überträgt hohe Frequenzen unverändert, hingegen werden tiefe Frequenzen gedämpft und phasenverschoben. Die Schaltung ist in Abbildung 7.5 widergegeben. Der Hochpaß wird wegen seiner differenzierenden Eigenschaften auch Differenzierglied genannt.

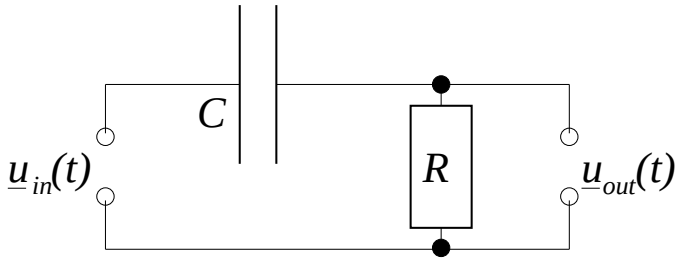


Abbildung 7.5: Einfachster Hochpaß

Die differenzierenden Eigenschaften sind Bode–Diagramm des Tiefpasses für $RC = 10^{-5}$s aus Gleichung (7.4) ersichtlich: die Ausgangsspannung wird über einen Ohm' schen Widerstand abgegriffen und ist darum im Grunde eine Messung desStromes, und dieser Strom ist nach Gleichung (7.4) proportional zum Differential der Spannung über dem Kondensator. Die in der Praxis tatsächlich verwendeten Differenzierer basieren allerdings auf Verstärkerschaltungen. Wie beim Tiefpaß berechnen wir die Verstärkung aus der Spannungsteilerformel:

$$\begin{aligned}
\underline{V} &= \frac{\underline{u}_{out}(t)}{\underline{u}_{in}(t)} \\
&= \frac{\underline{Z}_R}{(\underline{Z}_c + \underline{Z}_R)} \\
&= \frac{R}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{j}{\omega RC}} \quad = \quad \frac{1 + \frac{j}{\omega RC}}{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2} \quad = \quad \frac{\omega RC(\omega RC + j)}{(\omega RC)^2 + 1}
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Daraus ergibt sich der Betrag der Verstärkung und die Phase:

$$\boxed{V = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 R^2 C^2}}} \qquad \phi = arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)} \tag{7.29}$$

Bei hohen Frequenzen strebt V gegen 1. Bei tiefen Frequenzen wird die Verstärkung proportional zur Frequenz: $V \approx \omega RC$. Für die Grenzkreisfrequenz erhalten wird wiederum

$$V_g = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega_g{}^2 R^2 C^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_g = \frac{1}{RC} = 2\pi \cdot \nu_g,} \tag{7.30}$$

wie beim Tiefpaß.

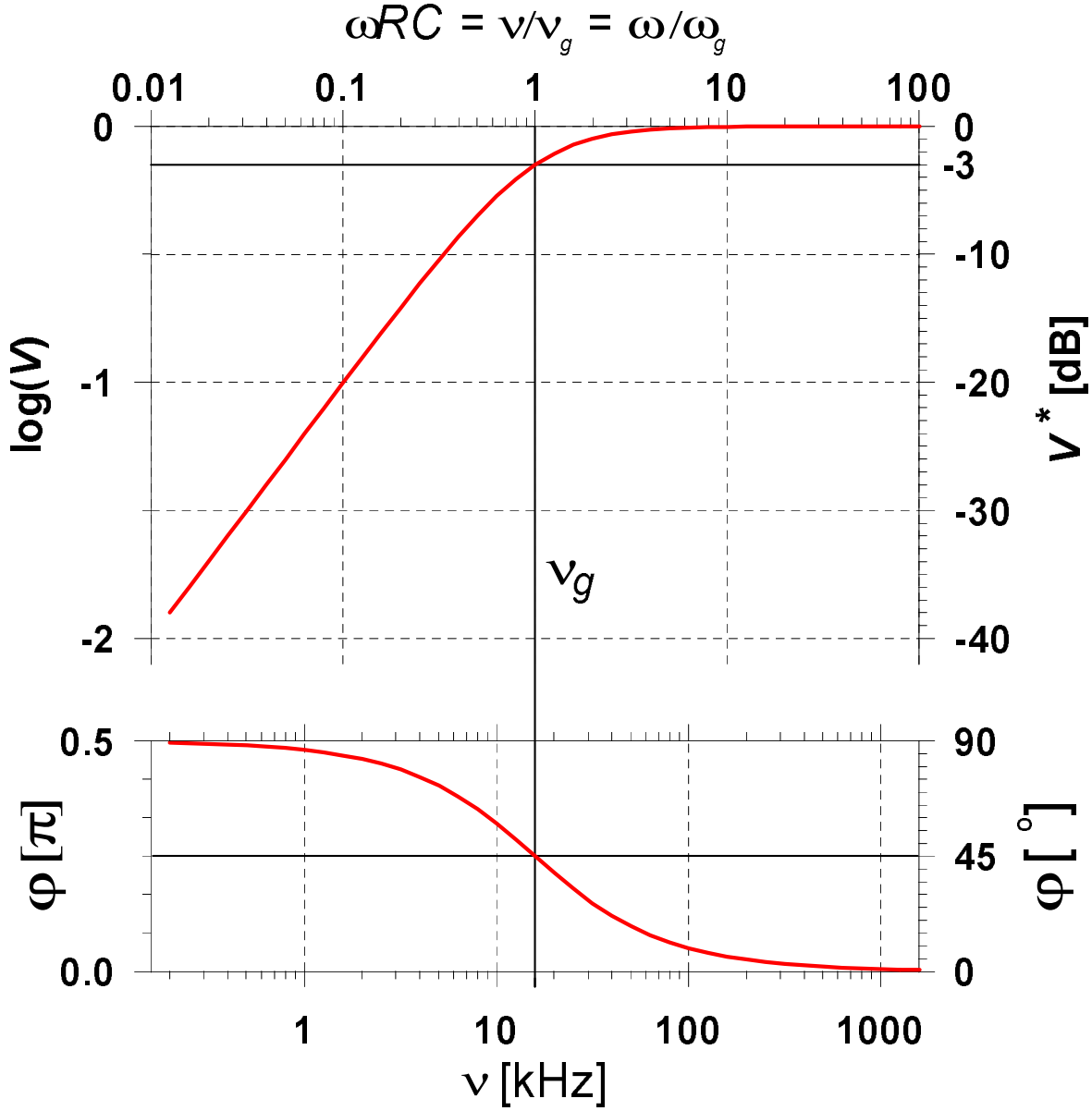


Abbildung 7.6: Bode–Diagramm des Hochpasses für $RC = 10^{-5}$s. Die beiden Kurven zeigen wiederum Betrag und Phase der Verstärkung. Die Grenzfrequenz ist auch eingezeichnet.

Die Phasenverschiebung bei der Grenzfrequenz ist

$$\boxed{\phi_g = \arctan\left(\frac{1}{\omega_g \cdot RC}\right) = 45°.} \tag{7.31}$$

Der Frequenzgang der Dämpfung und der Phasenverschiebung eines RC-Hochpasses sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Die Asymptote für tiefe Frequenzen ist

$$\lim_{\omega \to 0} V^* \cong 20 \cdot \log(\omega RC) = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right) = 20 \cdot \log(\omega) - 20 \cdot \log(\omega_g). \tag{7.32}$$

Die Steigung dieser Asymptote erhalten wir wiederum durch Differenzieren:

$$m = \frac{\partial V^*}{\partial \log(\omega)} = 20 \text{ dB/Dekade} \tag{7.33}$$

Man erkennt in Abbildung 7.6, daß unterhalb der Grenzfrequenz die Verstärkung mit 20dB/Dekade zunimmt und danach rasch abflacht. Tiefpaß und Hochpaß können auch mit Spulen statt Kondensatoren realisiert werden.

Aufgabe 5: Wie könnte die Schaltung für einen Hochpaß bzw. Tiefpaß mit Spulen realisiert werden? Wie sieht der Phasengang einer solchen Schaltung aus?

Tiefpaß aus Spule
und Ohm'schem Widerstand

Hochpaß aus Spule
und Ohm'schem Widerstand

Der Bandpaß

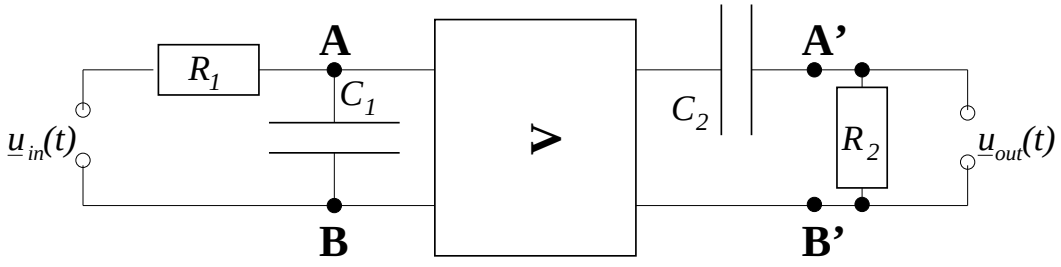


Abbildung 7.7: Einfacher Bandpaß

Durch passende Reihenschaltung eines Tief- und Hochpasses erhalten wir einen Bandpaß, d.h. ein Filter, das sowohl die hohen, als auch die tiefen Frequenzen wegfiltert. Ein möglicher Bandpaß ist in Abbildung 7.7 dargestellt. Um die gegenseitige Beeinflussung von Hoch- und Tiefpaß zu vermeiden, wurde ein Entkopplungsverstärker mit Verstärkung $V = 1$ zwischengeschaltet. Dies macht auch die Berechnung dieser Schaltung einfacher. Die Gesamtverstärkung kann dann einfach als Produkt der Einzelverstärkungen des Tiefpasses und des Hochpasses berechnet werden. Bei hohen Frequenzen wird die Impedanz von C_1 sehr klein und somit u_{out} kurzgeschlossen. Bei tiefen Frequenzen fließt kein Strom durch C_2 und somit ist die Spannung $u_{out} = 0$. R_1 dient auch als Schutzwiderstand, da sonst bei hohen Frequenzen u_{in} kurzgeschlossen würde. Üblicherweise wird in der Elektronik der Kondensator C_1 bei $\mathbf{A}^{'}$ $\mathbf{B}^{'}$ ohne Zwischenverstärker geschaltet, was Vorteile im Phasengang der Schaltung hat (s. Wien-Robinson Filter, Wien-Robinson Oszillator). Die Berechnung der Verstärkung wird dann etwas komplizierter.

Aufgabe 6: Berechnen Sie die komplexe Verstärkung, den Betrag der Verstärkung und die Phase der Verstärkung des obigen Bandpasses unter der Annahme, daß ein Zwischenverstärker vorhanden ist (s. Abbildung 7.7).

Resultat: Für die Verstärkung ergibt sich

$$\underline{V} = \frac{1}{(1 + j\omega R_1 C_1)(1 + \frac{1}{j\omega R_2 C_2})} = \frac{1 + \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} - j\left(\omega R_1 C_1 - \frac{1}{\omega R_2 C_2}\right)}{\left(1 + \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}\right)^2 + \left(\omega R_1 C_1 - \frac{1}{\omega R_2 C_2}\right)^2}. \tag{7.34}$$

Dies ist der Lösung der Schaltung ohne Entkopplungsverstärker recht ähnlich:

$$\underline{V} = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + (1 + j\omega R_1 C_1)(1 + \frac{1}{j\omega R_2 C_2})} \tag{7.35}$$

Aus Gleichung (7.34) erhalten wir für den Betrag und die Phase der Verstärkung:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}\right)^2 + \left(\omega R_1 C_1 - \frac{1}{\omega R_2 C_2}\right)^2}} = \frac{\omega R_2 C_2}{\sqrt{(\omega^2 {R_1}^2 {C_1}^2 + 1)(\omega^2 {R_2}^2 {C_2}^2 + 1)}} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2}{\omega R_1 C_1 + \omega R_2 C_2}\right) \end{aligned} \tag{7.36}$$

Aus Gleichung (7.36) können wir die Frequenz mit maximaler Verstärkung berechnen:

Aufgabe 7: Berechnen Sie aus Gleichung 7.36 die Frequenz ω_{max}, bei der die Verstärkung maximal wird.

Lösung:

$$\boxed{\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}}} \tag{7.37}$$

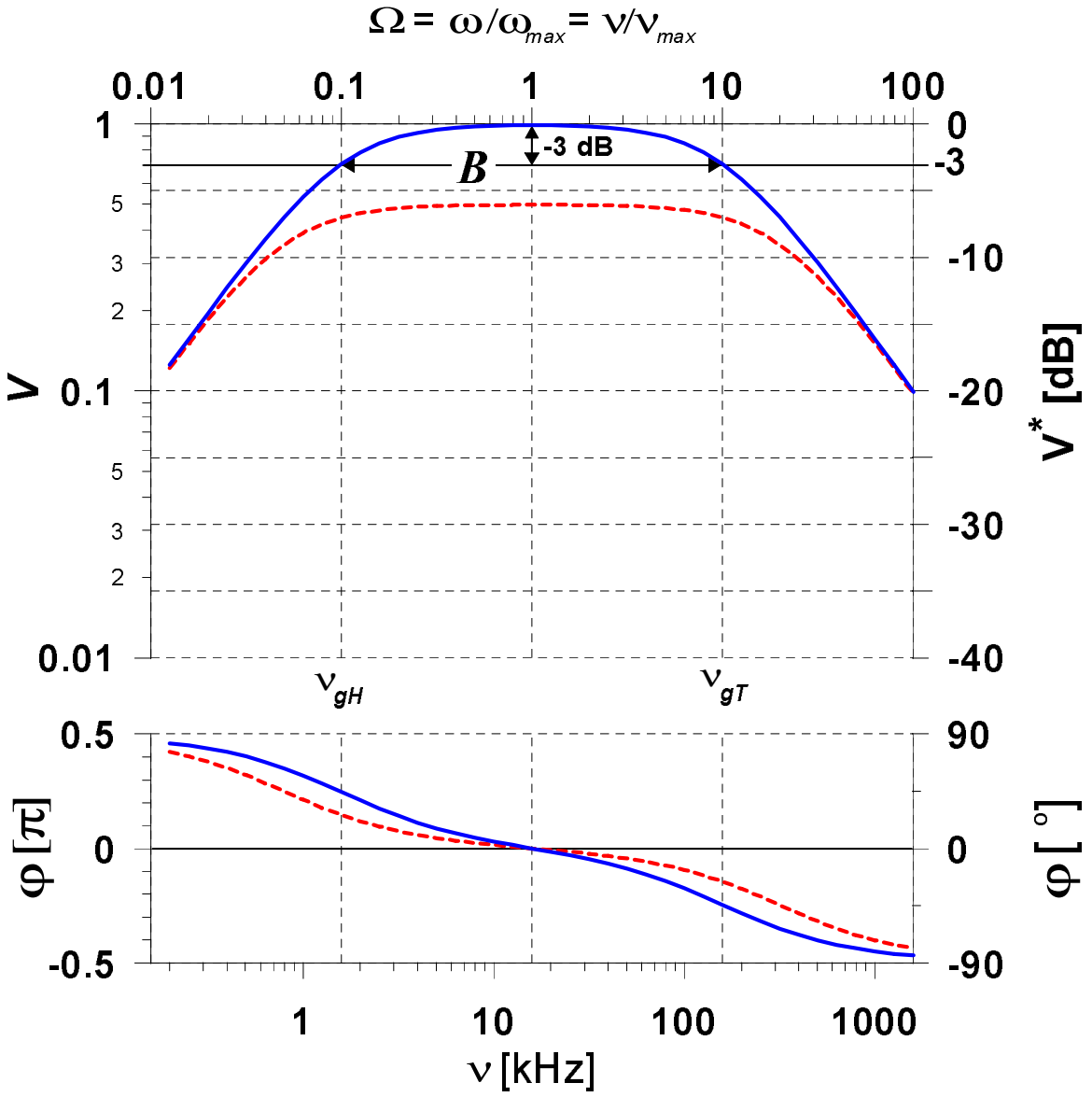


Abbildung 7.8: Bode–Diagramm des Bandpasses, berechnet mit den Werten $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$, $C_1 = 1\text{nF}$ und $C_2 = 100\text{nF}$. Der Bandpaß ohne Entkopplungsverstärker (gestrichelte Linie) zeigt eine größere Dämpfung, als derjenige mit Entkopplungsverstärker. Aus den Werten der Impedanzen resultieren die Grenzfrequenzen $\omega_{gT} = 10 \cdot \omega_{max}$ und $\omega_{gH} = 0.1 \cdot \omega_{max}$.

Die Bandbreite B des Bandpasses ist durch die Differenz der Frequenzen, bei denen die Verstärkung 3dB unter den Maximalwert gesunken ist, gegeben. Wenn $\nu_{gH} \ll \nu_{gT}$ erfüllt ist (wie in Abbildung 7.8), sind diese Frequenzen fast genau die Grenzfrequenz von Tief- und Hochpaß. Darum beträgt die Bandbreite:

$$B \approx \nu_{gT} - \nu_{gH} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2}\right) \tag{7.38}$$

In Abbildung 7.8 sind Frequenzgang von Betrag und Phase der Verstärkung im Bode–Diagramm eingezeichnet.

Der Schwingkreis

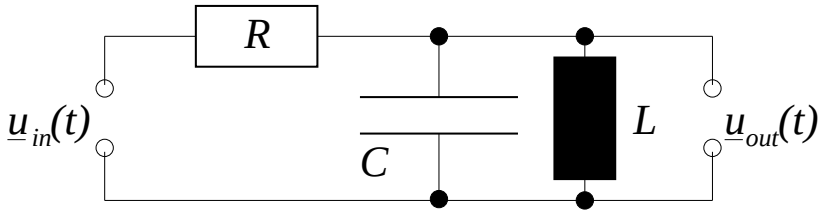


Abbildung 7.9: Parallelschwingkreis

Ein geschlossener Stromkreis, der nur eine Kapazität und eine Induktivität enthält, heißt ungedämpfter Schwingkreis (kein Widerstand in der Schaltung). Wird dieser Schwingkreis angestoßen, indem man für kurze Zeit eine Spannung anglegt, beginnen Strom und Spannung mit einer charakteristischen Resonanzfrequenz sinusförmig zu schwingen. Strom und Spannung haben dabei eine Phasenverschiebung vo 90°. Die Energie im Schwingkreis wird dadurch vom Kondensator auf die Spule und wieder zurück übertragen. Der Schwingkreis kann aber auch fest mit einer Wechselspannung betrieben werden und verhält sich dann wie eine normale Impedanz (Abbildung 7.9). Der vorgeschaltete Widerstand R schützt nur die Stromquelle. Anschaulich ist klar, daß bei sehr hohen Frequenzen der Kondensator leitend und die Impedanz somit null wird. Bei sehr tiefen Frequenzen wird die Spule leitend und die Impedanz wird wieder null. In beiden Fällen bricht also die Spannung U_{out} zusammen. Bei mittleren Frequenzen sind aber beide Bauteile schlecht leitend und es kann sich eine Spannung U_{out} aufbauen. Erstaunlich und vom Gleichstrom her ungewöhnlich ist aber, daß sich die beiden parallel geschalteten endlichen Impedanzen zu einer unendlichen Gesamtimpedanz „addieren“ können, wie die folgende Rechnung zeigt:

Aufgabe 8: Berechnen Sie die Impedanz eines ungedämpften Parallelschwingkreises. Bei welcher Frequenz (Resonanzfrequenz) wird die Impedanz unendlich?

Lösung:

$$\boxed{\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{7.39}$$

Die Verstärkung der Schaltung von Abbildung 7.9 kann wieder mit der Spannungsteilerformel berechnet werden:

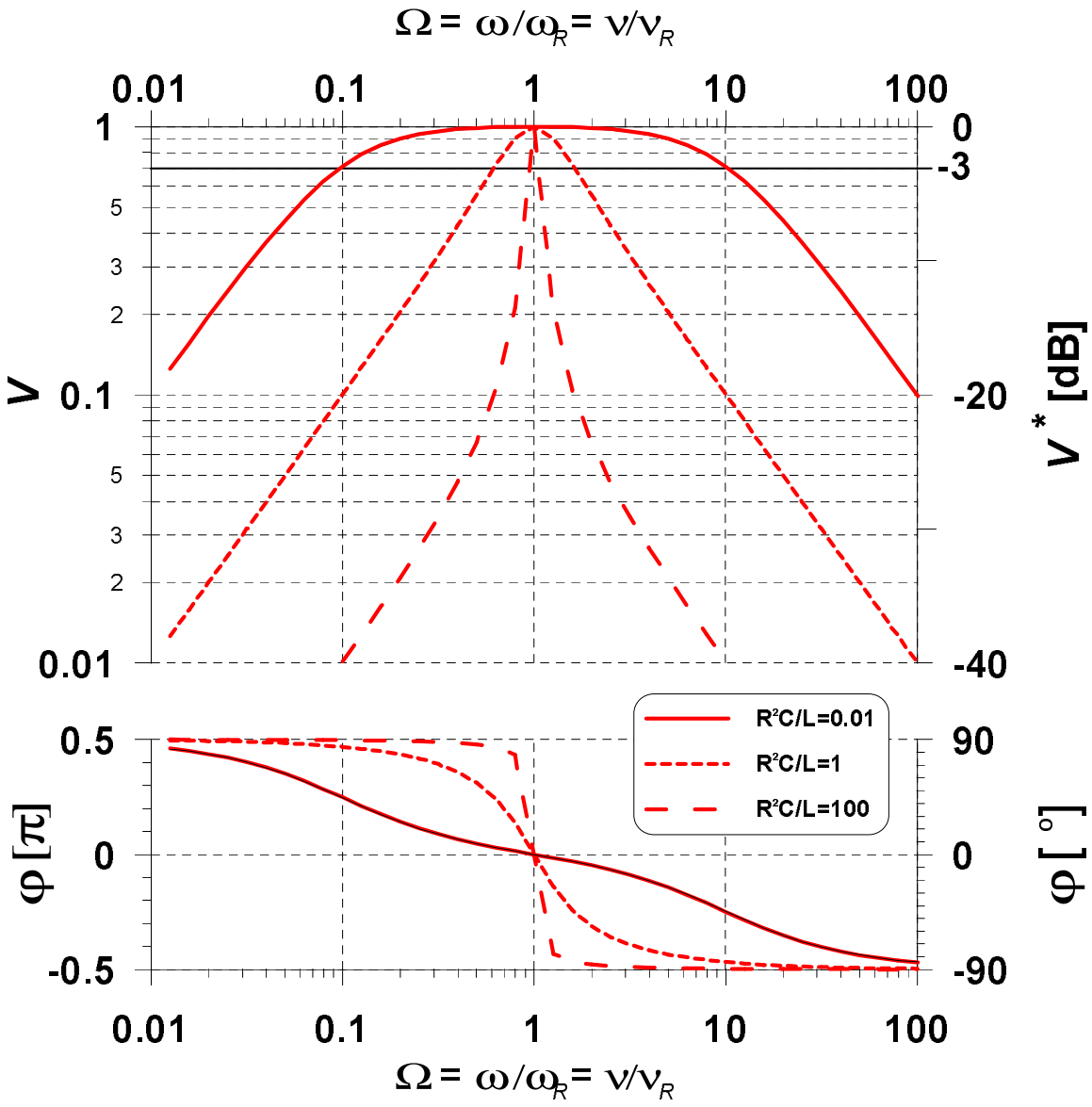


Abbildung 7.10: Bode–Diagramm des Parallelschwingkreises. Die drei Kurven entsprechen den Werten für $R^2C/L = 0.01, R^2C/L = 1$ und $R^2C/L = 100$.

Aufgabe 9: Berechnen Sie Frequenzgang der Verstärkung, des Betrags und der Phase der Verstärkung.

Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \frac{1}{jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) + 1} &&= \frac{1 + jR\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \\ |\underline{V}| &= \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} &&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2C^2}{\omega^2}\left(\omega^2 - {\omega_R}^2\right)^2}} \\ \phi &= \arctan\left(R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\right) &&= -\arctan\left(\frac{RC}{\omega}\left(\omega^2 - {\omega_R}^2\right)\right) \end{aligned} \tag{7.40}$$

Aufgabe 10: Transformieren Sie die Funktion 7.40 in den ω/ω_R–Raum, damit die Funktionen in einem Bode–Diagramm mit nur noch einer „verallgemeinerten“ x–Achse ω/ω_R (Abbildung 7.10) eingezeichnet werden können.

Lösungen:

$$\begin{aligned} |\underline{V}| &= \frac{1}{\sqrt{1 + R^2\frac{C}{L}\left(\frac{\omega_R}{\omega}\right)^2\left(\left(\frac{\omega}{\omega_R}\right)^2 - 1\right)^2}} \\ \phi &= \arctan\left(-R\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\omega_R}{\omega}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_R}\right)^2 - 1\right)\right) \end{aligned} \tag{7.41}$$

Betrag und Phase der Verstärkung sind im Bode–Diagramm (Abbildung 7.10) eingezeichnet. Aus Gleichung 7.41 ist ersichtlich, daß der Faktor R^2C/L die Kurvenform im Bode–Diagramm vollständig bestimmt. Im Bode–Diagramm sind drei Kurven für verschiedene Werte von R^2C/L eingezeichnet.

7.2 Experiment

„Learning by doing“ liegt heutzutage im Trend, darum werden der Frequenzgenerator (FG) und das Kathodenstrahloszilloskop (KO) hier nur kurz beschrieben. Die genaue Funktionsweise wird quasi nebenbei beim Lösen der praktischen Aufgaben erlernt.

7.2.1 Der Frequenzgenerator (FG)

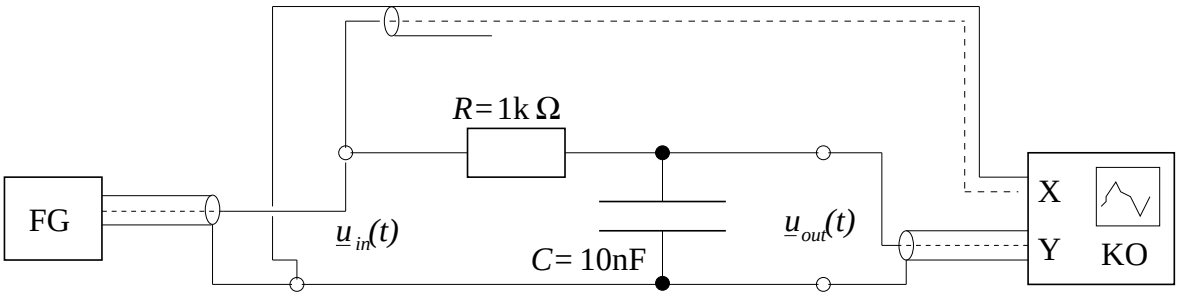
Der digitale Frequenzgenerator liefert uns die Wechselspannung $u_{in}(t)$. Die Amplitude und die Frequenz können über ein Tastenfeld digital eingegeben werden. Der FG liefert verschiedene Signalformen, wie z.B. Rechtecksignale, Dreiecksignale u.a., wir werden in erster Linie Sinussignale verwenden. Als Besonderheit erlaubt uns dieser FG Frequenzdurchläufe (frequency sweeps), d.h. es kann ein Frequenzbereich in einer wählbaren Geschwindigkeit durchlaufen werden.

7.2.2 Das Kathodenstrahloszilloskop (KO)

Das KO dient zum Vermessen von Spannungen, insbesondere können zeitliche Verläufe von Spannungen untersucht werden. KOs können zwei oder mehrere Spannungen gleichzeitig aufzeichnen, in unserem Falle $u_{in}(t)$ und $u_{out}(t)$. Das von uns verwendete KO kann zudem Kurven speichern und zu einem Drucker senden.

7.2.3 Praktische Aufgaben zum Tiefpaß

Bau eines Tiefpasses



- Bauen Sie auf dem Steckbrett einen Tiefpaß nach oben stehendem Schaltplan auf.

- Schließen Sie FG und KO an. Beachten Sie, daß die Abschirmungen der Koaxkabel über den KO bzw. FG intern geerdet werden. Kontrollieren Sie darum vor dem Anschalten, daß die Spannung des FG (also die Potentialseite oder Seele des Koaxkabels) nicht durch eine Abschirmung des KO geerdet bzw. kurzgeschlossen wird.

Vermessen der Grenzfrequenz

- Berechnen Sie die Grenzfrequenz dieses Tiefpasses nach Gleichung 7.22:

  Ergebnis: $\nu_g =$

- Erzeugen Sie mit dem FG eine Sinusspannung mit einer Amplitude von 3V und der oben berechneten Grenzfrequenz. Stellen Sie die Eingangs- und Ausgangsspannung auf dem KO dar und erlernen Sie dabei die Funktionsweise des KO:

FG und KO initialisieren	Gerät	Tastenfeld	Tasten
FG initialisieren	FG	DATA ENTRY	SHIFT INIT
Grenzfrequenz eingeben		DATA ENTRY	15.9
Dimension der Grenzfrequenz			
Pfeiltaste, bis kHz leuchtet		DATA ENTRY	Δ
Speichern		DATA ENTRY	SHIFT STORE
Amplitudeneingabe wählen		DISPLAY	AMPL
Amplitude 3 Vpp eingeben (= $\pm$3V)		DATA ENTRY	3 Vpp
KO initialisieren (Autosetup)	KO	SETUP	AUTO
Zeitachse auf 20μs einstellen		HORIZONTAL	SEC/DIV=20μs
Höhe der Eingangsspannung verstellen		VERTICAL	CH1
ebenso für die Ausgangspannung			CH2
Kurven vertikal verschieben			POSITION
Zeitachse ändern		HORIZONTAL	SEC/DIV
auf das Eingangssignal triggern	KO	TRIGGER	SOURCE=CH1

- Vermessen Sie die Dämpfung bei der Grenzfrequenz, indem Sie mit Hilfe des Cursors die Amplituden der Eingangs- und Ausgangsspannung bestimmen:

Kurven ausmessen	Gerät	Tastenfeld	Tasten
erneut die Grundeinstellung wählen	KO	SETUP	AUTO
Kurven auf gleicher Skala darstellen		VERTICAL	CH1=CH2=2V
Zeitachse geeignet wählen			HORIZONTAL=20μs
Kurven geeignet positionieren			POSITION
Cursor einschalten		CURSOR	ON
ersten Cursor wählen			ΔV1
Eingangsspannung messen			POSITION
obere/untere Linie wechseln			TOGGLE
zweiten Cursor wählen		CURSOR	ΔV2
U_{out} von Spitze zu Spitze messen			POSITION/TOGGLE

- Berechnen Sie die Verstärkung nach Gleichung (7.15), und vergleichen Sie ihr Resultat mit dem theoretischen Wert von Gleichung (7.22):

$$V_g = \frac{\hat{U}_{out}}{\hat{U}_{in}} = \text{———} = \qquad \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Messen Sie mit dem horizontalen Cursor Δt die Periodendauer und die zeitliche Verschiebung bei der Grenzfrequenz. Berechnen Sie daraus die Phasenverschiebung, und vergleichen Sie das Resultat mit dem theoretischen Wert:

$$
\begin{aligned}
T(\omega_g) &= \\
\Delta t(\omega_g) &= \\
\phi(\omega_g) &= \frac{360^\circ \cdot \Delta t}{T} = \quad ^\circ = \frac{2\pi \cdot \Delta t}{T} =
\end{aligned}
$$

- Messen Sie die Verstärkung und die Phasenverschiebung für ca. 15 geeignet gewählte Frequenzen zwischen 1kHz und 3MHz (logarithmisch aufteilen), und tragen Sie die Werte V^* und ϕ im Bode–Diagramm (Abbildung 7.4) ein:

Nr.	ν (kHz)	U_{in} (V)	U_{out} (V)	V	V^* (dB)	Δt (μs)	ϕ (π)
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							

- Die angegebenen Werte für R und C sind nicht sehr genau (Toleranz: 10%). Bestimmen Sie darum mit Hilfe des Bode-Diaramms (Abbildung 7.4) und mit weiteren Messungen die wahre Grenzfrequenz ($V^* = -3$dB) und vergleichen Sie mit der Theorie:

$$\omega_g = \qquad \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \nu_g = \qquad \text{Hz}$$

frequency sweep

- Führen Sie mit dem FG einen Frequenzdurchlauf (frequency sweep) im Frequenzbereich 100Hz $\leq \nu \leq$ 1MHz durch, zeichnen Sie das Resultat mit dem KO auf und drucken Sie es aus:

Frequenzdurchlauf einstellen	Gerät	Tastenfeld	Tasten
Startfrequenzeingabe wählen	FG	SWEEP	START FREQ
Startfrequenz eingeben		DATA ENTRY	100Hz
Stopfrequenzeingabe wählen		SWEEP	STOP FREQ
Stopfrequenz eingeben		DATA ENTRY	1MHz
Durchlaufgeschwindigkeit wählen		SWEEP	SWEEP RATE
Durchlaufgeschwindigkeit eingeben		DATA ENTRY	250Hz
logarithmische Darstellung wählen		SWEEP	SHIFT LIN/LOG
Pfeiltaste drücken, bis LOG langsam blinkt		DATA ENTRY	∇
Frequenzdurchlauf aktivieren		SWEEP	SHIFT ON/OFF
am KO Zeitachse einstellen		HORIZONTAL	SEC/DIV=0.5ms

Jetzt ist das Resultat zwar sichtbar, aber da das Signal nicht periodisch ist (die Frequenz ändert ja dauernd), kann es der KO nicht immer gleich darstellen, und es springt hin und her. Das liegt an den Triggerbedingungen. Der Trigger ist der Auslöser der x–Ablenkung. Die Bedingung für dieses Auslösen kann man bei jedem KO so einstellen, daß man ein gut lesbares, stehendes Bild erhält. Wir wollen jetzt diese Triggerbedingungen ändern und dann die Speicherfähigkeit des KO ausnutzen, um einen einzelnen Durchlauf einzustellen:

Triggerbedingungen ändern	Gerät	Tastenfeld	Tasten
nur das Ausgangssignal zeigen	KO	VERTICAL	MODE=CH2
mit dem Ausgangssignal triggern		TRIGGER	SOURCE=CH2
Triggermodus NORMAL einstellen		TRIGGER	MODE=NORM
Speichermodus einschalten,		TRIGGER	COUPLING=CD
gibt besseres Bild			STORAGE ON

Jetzt ist ein weißer Punkt sichtbar, der Triggerzeitpunkt. Auf dem TRIGGER–Tastenfeld können die Triggerbedingungen definiert werden. Das sind die Bedingungen, die

erfüllt sein müssen, damit der KO wieder links zu zeichnen beginnt. Die Bedingungen sind:

- steigende oder fallende Flanke
- LEVEL = Triggerspannung
- HOLDOFF = minimale Zeit, bis ein nächster Trigger möglich ist

Optimieren Sie jetzt die Anzeige durch Verändern der Triggerbedingungen. Wenn Sie den LEVEL über 3V, d.h. über die maximale Amplitude unseres Signales drehen, kann nicht mehr getriggert werden und das Bild friert ein. Damit haben Sie eigentlich erreicht, was wir wollen, aber nicht so ganz auf die feine Art. Darum drehen Sie den LEVEL wieder auf ca. 2.5V zurück und versuchen Sie dann, im „single sweep mode“ einen einzelnen Durchgang einzufangen:

Single Sweep (Einzelner Durchgang)	Gerät	Tastenfeld	Tasten
Triggerspannung wieder verkleinern	KO	TRIGGER	LEVEL=2.5V
einzelnen Durchgang aufzeichnen		TRIGGER	MODE=SGL SWEEP
Aufzeichnung wiederholen, bis eine Kurve **ganz** sichtbar ist		TRIGGER	RESET

Das Resultat ist jetzt schon recht gut, aber es ist recht mühsam eine Kurve schön auf das KO zu bringen. Dies geht einfacher, indem Sie den KO extern triggern. Der FG hat dazu an der Rückseite den TTL–Ausgang „SWP“, wo am Anfang jedes Frequenzdurchgangs ein Triggerpuls bereitsteht:

KO extern triggern	Gerät	Tastenfeld	Tasten
Geben Sie das FG sweep Triggersignal	FG	Rückseite	TTL OUTPUT SWP
auf den Extern-Trigger-Eingang des KO	KO	TRIGGER	Z
Extern-Triggern einstellen		TRIGGER	SOURCE=EXT

KO-Bild drucken	Gerät	Tastenfeld	Tasten
Eine **ganze** Kurve **genau**			
auf das Raster ausrichten	KO	HORIZONTAL	POSITION
Druckmenu wählen und		SETUP	SAVE+RECALL
Drucker (EPS-LQ) einstellen		CURSOR	POSITION
Drucker: Papier einlegen,			
einschalten	DRUCKER		ON
PrintScreen	KO	STORAGE	RECALL+HOLD
falls etwas falsch läuft:			
abbrechen			RECALL+HOLD

- Versehen Sie den Plot von Hand mit einer passenden Spannungs- und Frequenzachse. Denken Sie daran, daß Sie eine logarithmische x–Achse (Frequenzachse) haben.

7.2.4 Aufgaben zum Hochpaß

Machen Sie die gleiche Übung für einen Hochpaß, mit dem Unterschied, daß Sie zuerst die wahre Grenzfrequenz bestimmen und dann alle Werte relativ auf diese Grenzfrequenz beziehen.

- Messen Sie die Grenzfrequenz dieses Hochpasses ($V^* = -3\text{dB}$):

  $\nu_g =$

- Messen Sie in Dekadenschritten der Grenzfrequenz Betrag und Phase der Verstärkung, und tragen Sie die Resultate im Bode-Diagramm (Abbildung 7.6) ein:

$\frac{\nu}{\nu_g}$	ν (kHz)	U_{in} (V)	U_{out} (V)	V	V^* (dB)	Δt (μs)	ϕ (π)
0.01							
0.03							
0.1							
0.3							
0.5							
0.7							
1							
1.03							
1.1							
1.3							
10							
13							
100							

- Plotten Sie einen Frequenzdurchlauf und drucken Sie ihn aus.

7.2.5 Bandpaß

- Realisieren Sie einen Bandpaß ohne Entkopplungsverstärker. Wählen Sie R_1, R_2, C_1 und C_2 so, dass ν_{gT} 100 mal grösser ist als ν_{gH}.
- Bestimmen Sie die Maximalfrequenz:

  $\nu_{max} =$
- Erstellen Sie einen Frequenzdurchlauf
- Übertragen Sie einige Werte ins Bode-Diagramm (Abbildung 7.8)
- Bestimmen Sie die Bandbreite B
- Vergleichen Sie die Resultate mit den theoretisch berechneten Werten.

7.2.6 Schwingkreis

- Realisieren Sie einen Parallelschwingkreis nach dem Schema von Abbildung 7.9. Verwenden Sie dazu einen Widerstand mit $R = 1\text{k}\Omega$, einen Kondensator mit $C = 10\text{nF}$ und die Spule mit unbekannter Induktivität.
- Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz:

  $\nu_R \approx$

- Bestimmen Sie aus ν_R die Induktivität der Spule. Plotten Sie einen Frequenzdurchlauf für den Frequenzbereich $100\text{Hz} \leq \nu \leq 1\text{MHz}$.
- Übertragen Sie einige Werte ins Bode-Diagramm (Abbildung 7.9).
- Vergleichen Sie die Resultate mit den theoretisch berechneten Werten.
- Ersetzen Sie den $R = 1\text{k}\Omega$–Widerstand mit einem $R = 100\Omega$–Widerstand. Welche Konsequenz hat dies für die Resonanzbreite? Beobachten Sie auch, wie sich die Flanken des Ausgangssignals verhalten.

Literaturverzeichnis

[1] Titze, U. und Schenk, Ch.: *Halbleiter-Schaltungstechnik* (Springer).
Bibliothek ExWi: PFA 153–156, PFA 201, PFA 204.

[2] Gerthsen:*Physik* (Springer).
Bibliothek ExWi: ODA 212.

[3] Horowitz and Hill: *The Art of Electronics* (Cambridge University Press).
Bibliothek ExWi: PFA 193, PFA 203.

Kapitel 8

Elektronik II: Aktive Schaltungen

8.1 Einleitung

In diesem Praktikumsversuch sollen die im ersten Elektronikversuch durchgeführten Messungen an passiven Schaltelementen wiederholt und vertieft werden. Die Realisierung geschieht allerdings mit etwas moderneren und effizientern Meßmethoden als zuvor. Es soll eine Meßschaltung aufgebaut werden, die den Frequenzgang eines Hochpasses in doppelt logarithmischer Darstellung auf dem Oszilloskop darstellt und ausdruckt. Dazu verwenden wir aktive Schaltelemente, den Transistor und den Operationsverstärker. Natürlich wird wieder mit dem Funktionsgenerator (FG) und dem Oszilloskop (KO) gearbeitet, wobei die Kenntnis der Funktion dieser Instrumente hier vorausgesetzt wird. Abbildung 8.1 zeigt das Blockschaltbild, des in diesem Praktikum zu realisierenden Aufbaues an.

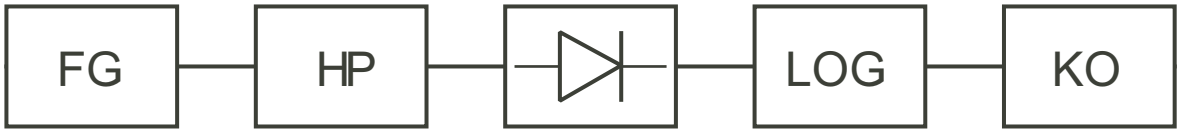


Abbildung 8.1: Blockschaltbild des in dem Praktikum zu realisierenden Meßaufbaues. Die Signalerzeugung erfolgt mit dem Frequenzgenerator (FG), dann folgt der auszumessende Hochpaß (HP), der Spitzenwertgleichrichter, der Logarithmierer (LOG), und zuletzt das Oszilloskop (KO).

8.2 Theorie

Die Kristallstruktur der Halbleiter (Si, Ge, GaAs, ..) gleicht der des Diamanten. Jedes der vier Valenzelektronen geht mit einem Valenzelektron der vier Nachbaratome eine homöopolare Bindung ein. Die mittlere kinetische Energie der Elektronen bei Zimmertemperatur (0,04 eV) ist viel kleiner als die Bindungsenergie (1 eV), und daher sind nur wenige Elektronen frei beweglich (kleine Eigenleitfähigkeit). Erst durch weitere Energiezufuhr wesentlichen Ausmasses werden zusätzliche Elektronen freigesetzt und damit die Leitfähigkeit erhöht. Darum nimmt bei Halbleitern die Leitfähigkeit mit steigender Temperatur zu. Der Einbau von Fremdatomen (Dotierung) ist eine andere Möglichkeit die Zahl der freien Elektronen, und somit die Leitfähigkeit, zu erhöhen.

Besitzt ein Fremdatom im Kristall ein Valenzelektron zuviel (5-wertige Elemente: P, As, Sb, ...), so kann dieses zusätzliche Elektron leicht abgetrennt werden ($\Delta E \approx 0{,}05$ eV), und dieses nun freie Elektron trägt zur Erhöhung der Leitfähigkeit bei (n-dotiert, n-Halbleiter). Besitzt das Fremdatom hingegen nur drei Valenzelektronen (3-wertige Elemente: B, Al, Ga, In, ...) so fehlt eines für die Doppelbindung. Mit einer kleinen Energiezufuhr ($\Delta E \approx 0{,}05$ eV) kann jedoch ein Elektron aus einer benachbarten, vollständigen Bindung abgezogen werden und für den Aufbau der Doppelbindung verwendet werden. Es entsteht ein sogenanntes Loch, das nun im Kristall frei herumwandern kann. Ein solches Loch verhält sich wie eine freie positive Elementarladung und trägt somit zur Leitfähigkeit bei (p-dotiert, p-Halbleiter).

Für die Herstellung elektronischer Bauelemente wird heute hauptsächlich Silizium und für sehr schnelle Schaltungen (> 1 GHz) GaAs verwendet. Germanium wurde als erstes als Ausgangsmaterial für die Halbleiterproduktion verwendet, ist jedoch heute praktisch komplett von Silizium verdrängt worden und wird heute nur mehr in Ausnahmefällen verwendet.

8.2.1 Dioden

Die Diode ist das einfachste Halbleiterbauelement. Sie besteht aus der Hintereinanderschaltung von einem p-dotierten und einem n-dotierten Kristall. Strom kann durch eine Diode nur in einer Richtung, der Durchlaßrichtung, fließen. In der anderen Richtung, der Sperrichtung, fließt kein Strom (genauer gesagt ein sehr kleiner Strom, der Sperrstrom). Eine Übersicht über Dioden ist in Abbildung 8.2 angegeben.

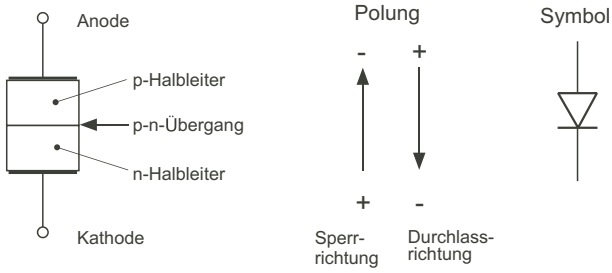


Abbildung 8.2: Übersicht über Dioden

In einer in Sperrichtung gepolten Diode werden die Elektronen bzw. Löcher durch das elektrische Feld aus dem Gebiet des p-n-Überganges in Richtung der Kathode bzw. der Anode gedrägt. Dadurch entsteht beim p-n-Übergang eine an beweglichen Ladungsträgern sehr arme Zone (sehr hochohmige Zone) die praktisch keinen Stromfluß zuläßt. Wird die Diode hingegen in Durchlaßrichtung betrieben, so wandern die Löcher vom p-dotierten Bereich durch den p-n-Übergang in das n-dotierte Gebiet und werden dort durch die vorhandenen Elektronen neutralisiert (Rekombination). Umgekehrt gelangen Elektronen vom n-dotierten in das p-dotierte Gebiet. Da Löcher und Elektronen von den metallischen Anschlüssen (Kathode und Anode) beliebig nachgeliefert werden, fließt ein großer Strom in Durchlaßrichtung bei geringem Spannungsabfall am p-n-Übergang (Durchlaßspannung, bei Si-Dioden ist etwa 0,7 V). Der Zusammenhang von Strom und Spannung eines elektrischen Schaltungselementes wird in der Elektronik in einer so genannten Kennlinie dargestellt. Die Kennlinie einer Diode ist in 8.3 wiedergegeben.

Der Durchlaßstrom steigt schon bei kleinen positiven Spannungen U_{AK} auf hohe Werte an. Er darf jedoch einen Maximalwert I_{max} nicht überschreiten da die Diode sonst thermisch zerstört wird. Dieser Wert liegt zwischen 5 mA und einigen 100 A je nach Bauform der Diode. Bei hohen Sperrspannungen $U_{AK} < -U_{S\,\max}$ steigt der Sperrstrom wieder stark an. Je nach Bauart der Diode ist diese maximale Sperrspannung zwischen 10 V und 10 kV. Der Betrieb einer normalen Diode oberhalb dieser maximalen Sperrspannung führt zur Zerstörung der Diode. Dioden welche man oberhalb der maximalen Sperrspannung betreiben kann und diesen Effekt ausnutzen, heißen Zenerdioden.

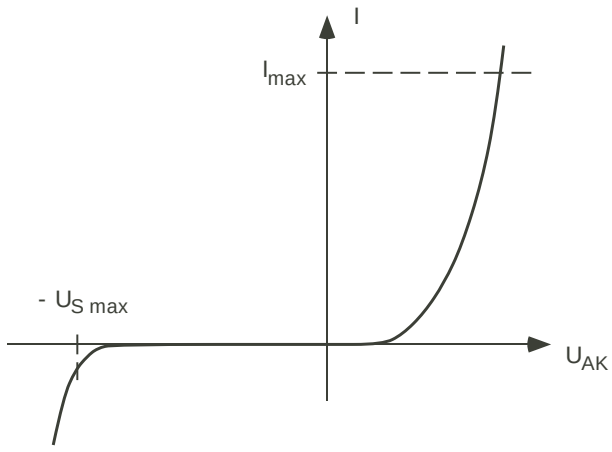


Abbildung 8.3: Strom-Spannungskennlinie einer Diode

Die Kennlinie der Diode läßt sich für kleine Ströme, gemäß den Gesetzen der Halbleiterphysik, durch die Shockley-Gleichung beschreiben (William Shockley, 1910-1989)

$$I = I_S \left(e^{\frac{U_{AK}}{U_T}} - 1 \right) \tag{8.1}$$

wobei I_S der Sättigungssperrstrom und U_T die Temperaturspannung sind. Der Sättigungssperrstrom von Siliziumdioden liegt, je nach Bauform und Größe, im Bereich von 5 pA bis 20 nA. Dies ist der theoretisch maximale Strom welcher in Sperrrichtung fließen kann für den Fall $U_{AK} \rightarrow -\infty$. Üblicherweise definiert man die Temperaturspannung U_T als

$$U_T = \frac{k\,T}{m\,q_0}[V] \tag{8.2}$$

mit q_0 der Elementarladung, k der Boltzmannkonstante, m ein Koeffizient welcher vom Leitungsmechanismus abhängt (Abweichung von der einfachen Shockley'schen Diodenkennlinie) und T der absoluten Temperatur. Idealerweise ist bei Zimmertemperatur die Temperaturspannung 26 mV, also $m = 1$. Für normale Si-Dioden ist m kleiner 1, typisch ist $m \approx 0{,}7$ und man erhält $U_T \approx 40\,\text{mV}$ (U_T kann zwischen 26 und 50 mV liegen). Die Shockleygleichung gibt den Durchbruch bei hohen Sperrspannungen nicht wieder, sie gilt also nicht für diesen Bereich. Auch gilt sie nicht für hohe Durchlaßströme, dort ist die Kennline annähernd quadratisch. Verschiedene Si-Dioden unterscheiden sich wenig in der Kennlinie, aber stark in der Schaltgeschwindigkeit, der maximalen Sperrspannung, dem maximalen Sperrstrom und anderen elektrischen Parametern.

8.2.2 Der Transistor

Der Transistor wurde von John Bardeen, Walter Brattain und William Shockley in 1946 entdeckt (Nobelpreis in Physik, 1956). Seitdem hat der Transistor vielfältige Verwendung gefunden und ist aus unserem Leben nicht mehr wegzudenken. Stark vereinfacht betrachtet besteht ein Transistor im wesentlichen aus zwei gegeneinander geschalteten Dioden (p-n Übergänge). Je nach Kombination der dotierten Schichten erhält man entweder einen npn oder einen pnp Transistor. Die Schaltzeichen und der Aufbau sind in Abbildung 8.4 dargestellt. Soll ein Kollektorstrom fließen müssen die Potentiale so gewählt werden, daß die Basis-Emitterdiode in Durchlaßrichtung und die Kollektor-Basisdiode in Sperrrichtung gepolt sind.

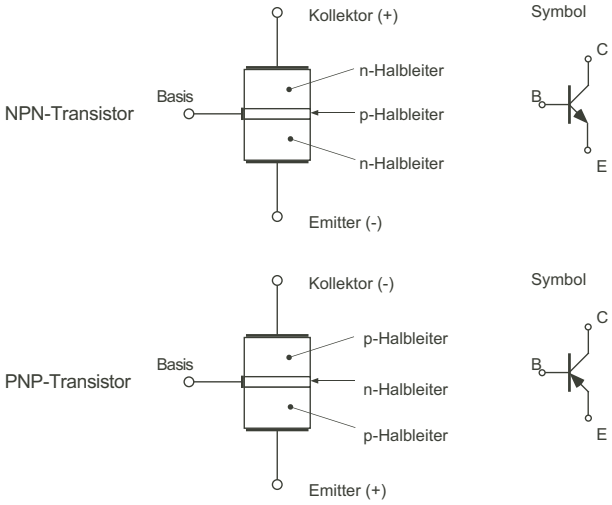


Abbildung 8.4: Übersicht über npn– und pnp–Transistoren

Die Basiszone ist nun so dünn, daß praktisch alle vom Emitter eindringenden Ladungsträger anstatt zu rekombinieren gleich in die Kollektorzone weiterdriften. Nur ein kleiner Teil rekombiniert und bildet den Basisstrom. Der Kollektorstrom hängt sehr stark von der Spannung

zwischen Basis und Emitter ab, jedoch kaum von der Spannung zwischen Kollektor und Basis. Diese Tatsache läßt sich zur Steuerung des Kollektorstromes ausnützen.

Das Verhalten von Transistoren wird, wie auch bei Dioden und anderen Halbleiterbauelementen, durch Kennlinien ausreichend beschrieben. Anders als bei der Diode braucht man für die Beschreibung eines Transistors vier Kennlinien (Abbildung 8.5). Man bevorzugt dabei die Darstellung des Verhaltens des Transistors in der Emitterschaltung, bei der der Emitter sowohl dem Eingang als auch dem Ausgang gemeinsam ist. Die Details der Transistor Grundschaltungen können z. B. aus Tietze & Schenk, Kapitel 4, Seiten 28ff, *Der Transistor und seine Grundschaltungen*, entnommen werden. Beim Betrieb des Transistors als Verstärker (Bereich II im 1. Quadranten, Abbildung 8.5) stellt man den Arbeitspunkt A des Transistors durch den Basisstrom und die Basis-Emitterspannung ein. Die Bereiche I und III (im 1. Quadranten, Abbildung 8.4) sind für Schalteranwendungen von großer Bedeutung.

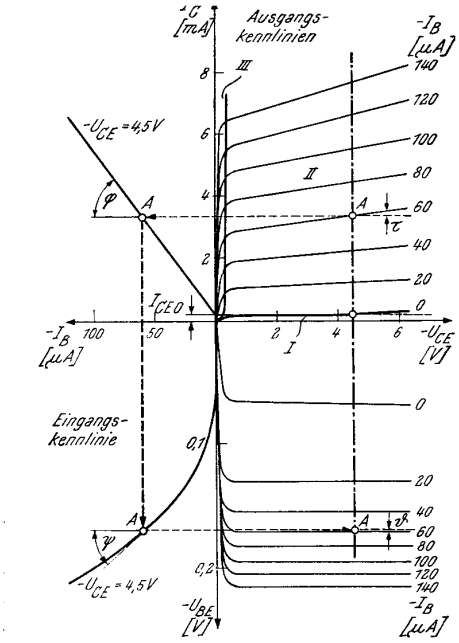


Abbildung 8.5: Typische Kennlinien eines PNP-Transistors in Emitterschaltung.

8.2.3 Der Operationsverstärker

Da wir in dieser Übungsaufgabe den Operationsverstärker einsetzen werden, wollen wir ihn hier kurz einführen. Für eine ausführliche Beschreibung, die den Umfang dieser Übungsanleitung weit übersteigen würde, sei auf die eingangs angeführte Literatur verwiesen.
Der Operationsverstärker hat zwei Eingänge, einen invertierenden (–) und einen nichtinvertierenden (+) Eingang. Die Ausgangsspannung U_a des Operationsverstärkers ist der Differenz der Eingangsspannungen ($U_D = U_+ - U_-$) direkt proportional. Das Prinzipschaltbild eines Operationsverstärkers ist in Abbildung 8.6 angegeben.
Der Operationsverstärker kann als Bauelement mit gegebenen Kenndaten angesehen werden. Der Vergleich zwischen realen Werten von käuflichen Operationsverstärkern und den idealen Werten ist in der Tabelle 1 angegeben. Es gibt noch weitere Kenngrößen der Operationsverstärker deren Kenntnis hier aber nicht notwendig ist. Die Angabe dieser Daten reicht aus, um die Anwendung des Operationsverstärkers in einer Schaltung zu verstehen. Für unsere Anwendung reicht es sogar aus, den Operationsverstärker als "black box" mit den idealen Werten zu betrachten, da wir die Operationsverstärker-Typen so ausgewählt haben, daß die durch die Beschaltung gestellten Anforderungen an den Operationsverstärker bei weitem übertroffen werden.

Aufgabe 1: Um die Funktion des Operationsverstärkers verstehen zu lernen, wollen wir nun die Spannungsverstärkung der Schaltung eines invertierenden Verstärkers berechnen. Die

Der Operationsverstärker ist im Grunde genommen ein ganz normaler Verstärker welcher als integrierter Schaltkreis (*integrated circuit*, IC) erhältlich ist. Während jedoch die Eigenschaften eines normalen Verstärkers durch seinen inneren Aufbau gegeben sind, ist ein Operationsverstärker so beschaffen, daß seine Wirkungsweise ausschließlich durch äußere Bauelemente eingestellt werden kann. Um dies zu ermöglichen, werden Operationsverstärker als gleichspannungsgekoppelte Verstärker mit hoher Spannungsverstärkung (Leerlaufverstärkung), hohem Eingangswiderstand und niedrigem Ausgangswiderstand ausgeführt.

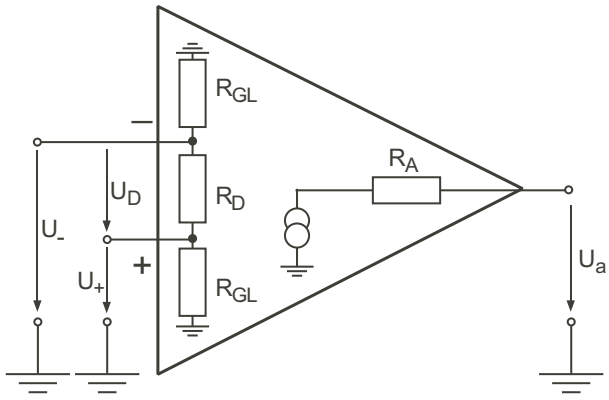


Abbildung 8.6: Prinzipschaltbild eines Operationsverstärkers mit seinem relevanten "Innenleben".

Spannungsverstärkung ist ja definiert als

$$v_U = \frac{U_a}{U_e} \tag{8.3}$$

Parameter	**Symbol**	**Typische reale Werte**	**Idealer Wert**
Leerlaufverstärkung	v	10^5 – 10^7	∞
Bandbreite (DC – f_g)	B	100 kHz – 5 GHz	∞
Differenzeingangswiderstand	R_D	1 MΩ – 1 GΩ	∞
Gleichtakteingangswiderstand	R_{GL}	1 GΩ – 1 TΩ	∞
Eingangsruhestrom	I_B	10 fA – 10 nA	0
Offsetstrom	I_0	1 fA – 1 nA	0
Ausgangswiderstand	R_A	1 Ω – 1 kΩ	0
Maximaler Ausgangsstrom	I_{max}	10 mA – 1 A	∞

Tabelle 8.1: Kenndaten von realen und idealen Operationsverstärkern

Die Funktion des invertierenden Verstärkers basiert darauf, daß ein Teil der Ausgangsspannung zum Eingang zurückgeleitet wird, und zwar mit entgegengesetzter Polarität wie die Eingangsspannung. Dies ist eine so genannte Gegenkopplung und begrenzt die theoretische Verstärkung des Operationsverstärkers von ∞ auf einen Wert der durch R_1 und R_2 eingestellt wird. Verwenden Sie nun die Kirchhofsche Knoten- und Maschenregel zur Berechnung der Spannungsverstärkung. Zu Ihrer Hilfe sind der Stromknoten sowie die beiden zu berücksichtigenden Spannungsmaschen in Abbildung 8.7 eingezeichnet. Den Operationsverstärker nehmen Sie als idealen Operationsverstärker, so wie er in Tabelle 1 definiert ist, an. Sie sollten dann zu dem folgenden Ergebnis kommen

$$v_U = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{8.4}$$

Das Minuszeichen in Gleichung 8.4 bedeutet eine Phasenverschiebung zwischen Ausgang und Eingang um 180°, daher der Name invertierender Verstärker. Was ist der Eingangswiderstand dieser Schaltung, mit der die Spannung U_e belastet wird? Ein gegengekoppelter Operationsverstärker stellt seine Ausgangsspannung so ein, daß die Spannungsdifferenz zwischen invertierendem Eingang (–) und nichtinvertierendem Eingang (+) Null ist. Ist dies nicht möglich, geht der Ausgang des Operationsverstärkers in Sättigung, d.h. in Maximalausschlag. Das Wesen der Gegenkopplung ist nun, daß die Änderung der Ausgangsspannung der Änderung der Eingangsspannung entgegen wirkt.

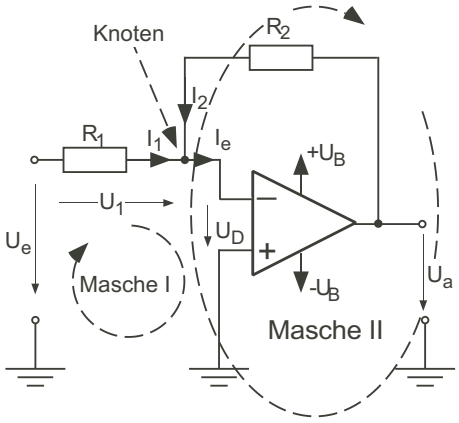


Abbildung 8.7: Schaltung des Invertierenden Verstärkers mit einer Anleitung für die Berechnung.

8.2.4 Der Logarithmierer

Der Logarithmierer ist eine Operationsverstärkerschaltung, welche den exponentiellen Zusammenhang zwischen Kollektorstrom und Basis-Emitterspannung und Basis-Kollektorspannung des Transistors ausnutzt

$$I_C = a\, I_{ES} \left(e^{U_{BE}/U_T} - 1\right) - I_{CS} \left(e^{U_{BC}/U_T} - 1\right) \tag{8.5}$$

Dies ist die Erweiterung der Shockleygleichung auf den Transistor, wobei I_{ES} und I_{CS} die Sättigungssperrströme des Transistors, und a eine Konstante nahe 1 sind. Die einfachste Schaltung eines Logarithmierers mit Transistor ist in Abbildung 8.8 dargestellt. In dieser Schaltung bewirkt der Transistor eine variable, eben exponentiell mit dem Eingangsstrom sich ändernde, Gegenkopplung und somit eine variable Verstärkung. Man kann in dieser Schaltung den Transistor auch durch eine Diode ersetzen. Der verfügbare Eingangsstrombereich ist in dem Fall aber kleiner.
Die angelegte Eingangsspannung U_e erzeugt einen Strom $I_e = U_e/R_1$(Maschenregel) über R_1, da ja der Eingangsstrom in einen idealen Operationsverstärker gleich Null ist (siehe oben). Der Eingangsstrom eines realen Operationsverstärkers, auch Eingangsruhestrom genannt (engl. *Input Bias Current*), ist typenabhängig, und kann sehr klein sein ($\sim$ fA). Der Strom I_e ist jetzt natürlich gleich dem Kollektorstrom des in Basisschaltung verwendeten Transistors im Gegenkopplungskreis. In der Basisschaltung ist die Transistorbasis dem Eingang sowie dem Ausgang gemeinsam (siehe Abbildung 8.8).
Der Emitter des Transistors wird mit dem Ausgang des Operationsverstärkers verbunden womit $U_a = -U_{BE}$ ist. Somit ist

$$U_a = -U_T \ln\left(\frac{U_e}{a\, I_{ES}\, R_1}\right) \tag{8.6}$$

da $U_{BC} = 0$ und $a = 1$ sind. Weiters wurde die Zahl 1 gegenüber dem Exponentialterm in Gleichung 8.5 vernachlässigt. Der Sättigungssperrstrom I_{ES} ist eine Materialkonstante und

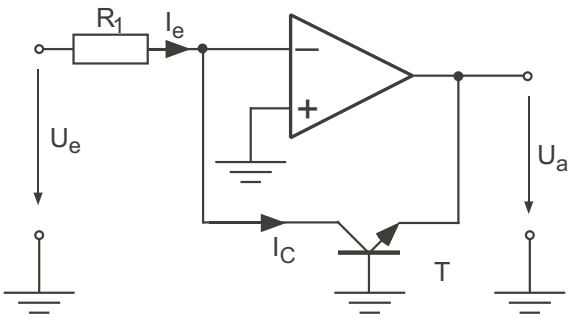


Abbildung 8.8: Prinzipschaltung eines Logarithmierers unter Verwendung eines Transistors.

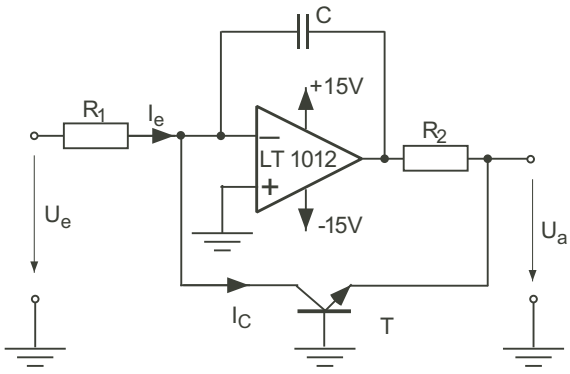


Abbildung 8.9: Tatsächliche Logarithmiererschaltung.

beträgt 0,07 pA. Die Eigenschaft des gegengekoppelten Operationsverstärkers, daß sich die Ausgangsspannung stets so einstellt, daß der gesamte Eingangsstrom I_e über den Gegenkopplungszweig abfließt, sorgt in diesem Fall für die Ausgangsspannung $-U_{BE}$. Diese Schaltung ist allerdings stark von der Temperatur abhängig. Die Temperaturabhängigkeit rührt einerseits von U_T her, andererseits von I_{ES} und auch von der Temperaturabhängigkeit von U_{BE} (– 2 mV/Grad). Durch geeignete Kompensationsschaltungen läßt sich auch dieser Fehler fast beseitigen und ein temperaturunabhängiger Logarithmierer für rund sechs Dekaden realisieren. Dies führt allerdings etwas zu weit für einen Praktikumsversuch. Im folgenden wollen wir nur etwas einfachere Maßnahmen zur Verbesserung der obigen Schaltung einführen. Abbildung 8.9 zeigt die im Praktikum zu realisierende Schaltung mit Verbesserungen zur Stabilität.
Die Schaltung in Abbildung 8.9 hat zwei zusätzliche Bauelemente verglichen mit der ursprünglichen Schaltung von Abbildung 8.8. Erstens wird ein Kondensator C als Gegenkopplung des Operationsverstärkers geschaltet um die Schwingneigung dieser Schaltung zu reduzieren, welche aufgrund der hohen Verstärkung für kleine Eingangsströme gegeben ist. Der Kondensator ist gleichspannungsmäßig nicht wirksam (Widerstand ∞). Ändert sich aber die Spannung an seinen Anschlüssen, so wird die Verstärkung des Operationsverstärkers durch den endlichen Wechselspannungswiderstand des Kondensators im Gegenkopplungszweig reduziert, was sich natürlich stabilisierend auf die Schaltung auswirkt. Die zweite Veränderung zur ursprünglichen Schaltung ist ein Widerstand R_2 in Serie zum Operationsverstärkerausgang, welcher zusätzliche Stabilität des Transistors bringt. Als Emitterwiderstand reduziert er die Verstärkung des Transistors, und so z.B. die Anfälligkeit auf Änderungen der Umgebungstemperatur durch die Temperaturabhängigkeit von U_{BE}. Mit der in Abbildung 8.9 angegeben Schaltung kann man einen Logarithmierer für mindestens vier, sehr wahrscheinlich fünf, Dekaden realisieren.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie mit Hilfe von Gleichung 8.6 die theoretische Steigung der Verstärkerkennlinie, also die Änderung ΔU_a pro Änderung der Eingangsspannung U_e um den Faktor 10 (pro Dekade).

8.3 Experiment

Letztendlich sollen Sie den in Abbildung 8.1 dargestellten Aufbau realisieren. Der Einfachheit halber, bauen Sie zuerst Teilgruppen der Schaltung auf, und testen diese einzeln, bevor Sie alle Komponenten zur Durchführung der Schlußmessung zusammenschalten.
Für den Transistor verwenden Sie den Typ 2N2222, für den Logarithmierverstärker den Operationsverstärker Typ LT1012, und für den Spitzenwertgleichrichter (siehe später) den Operationsverstärker Typ LF411. Die Datenblätter der einzelnen Bauteile mit ihren Kennlinien und Bauteilanschlüssen sind dem Praktikumsversuch beigelegt.

Für den Operationsverstärker bauen Sie die in Abbildung 8.10 angegeben Schaltung auf (Elektrometerverstärker). Legen Sie am Eingang (U_e) über ein Potentiometer eine Gleichspannung kleiner der Betriebsspannung an. Bei korrekter Funktion des Operationsverstärkers ist die Ausgangsspannung gleich der Eingangsspannung. Wenn Sie wollen, können Sie hier auch die Schaltung von Aufgabe 1 mit einer Verstärkung von 10 realisieren. Versuchen Sie einen Eingangswiderstand der Schaltung von etwa 100 kΩ zu erreichen.

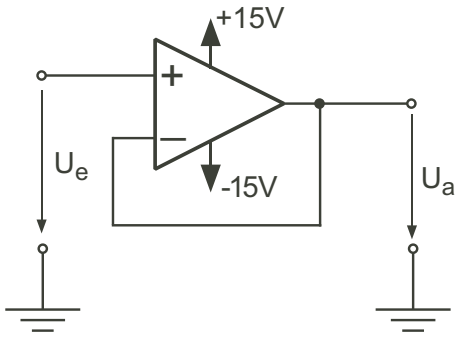


Abbildung 8.10: Testschaltung für den Operationsverstärker.

8.3.1 Testschaltungen

Es kann immer wieder passieren, daß ein Halbleiterbauelement kaputt geht. Deswegen testen Sie den Transistor und den Operationsverstärker auf ihre Funktion bevor Sie die Schaltungen aufbauen. Der Transistor wird mit dem Fluke Digitalvoltmeter (DVM) direkt vermessen indem man die Funktion der Basis-Emitter- und die Basis-Kollektordiode (siehe Abbildung 8.4) mit dem Diodentestmodus des DVM überprüft.

Aufgabe 3: Erklären Sie die Wirkungsweise der Schaltung in Abbildung 8.10.

8.3.2 Dimensionieren Sie einen Logarithmierer

Die zu realisierende Schaltung für den Logarithmierer wurde ja schon im Kapitel 8.2.4 ausführlich diskutiert, mit der äußeren Beschaltung zur Durchführung der ersten Messungen ist sie in Abbildung 8.11 wiedergegeben. Bevor Sie den Logarithmierer Aufbauen und in Betrieb nehmen können, müssen Sie erst einmal den Wert beiden WiderständeR_1 und R_2 berechnen.

- Dimensionieren Sie R_1 so, daß bei einer Eingangsspannung U_e von 10 V die Ausgangsspannung U_a etwa –0,50 V ist. Wird die Ausgangsspannung größer, so beginnt die Basis-Emitter-Diode zu stark zu leiten und eine exponentielle Kennlinie (Gleichung 8.5) ist nicht mehr gegeben. Eventuell stirbt auch der Transistor durch die sich ergebende Überlastung. Mit einer Diode, welche Emitter (Kathode) und Kollektor (Anode) des Transistors verbindet, kann man hier Abhilfe schaffen.

- Dimensionieren Sie R_2 so, daß die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers etwa 20% größer als U_a ist. Nehmen Sie dazu an, daß der Ausgangstrom des Operationsverstärkers gleich dem Emitterstrom (also auch gleich dem Kollektorstrom I_C) des Transistors ist, und kein Strom über den Ausgang der Schaltung abfließt.

- Besprechen Sie Ihre Berechnungen mit dem Assistenten und bauen Sie danach Ihre dimensionierte Schaltung auf.

- Testen Sie die Schwingneigung Ihrer Schaltung indem Sie die Ausgangsspannung am Oszilloskop, für plötzliche Änderungen der Eingangsspannung mit und ohne den Kondensator C (für C einen Wert von etwa 10 nF nehmen) aufzeichnen. Gegebenenfalls ist der Kondensator C anders zu wählen, wenn die Schaltung trotz Kondensator eine Schwingneigung aufweist. In dem Fall konsultieren Sie Ihren Betreuer.

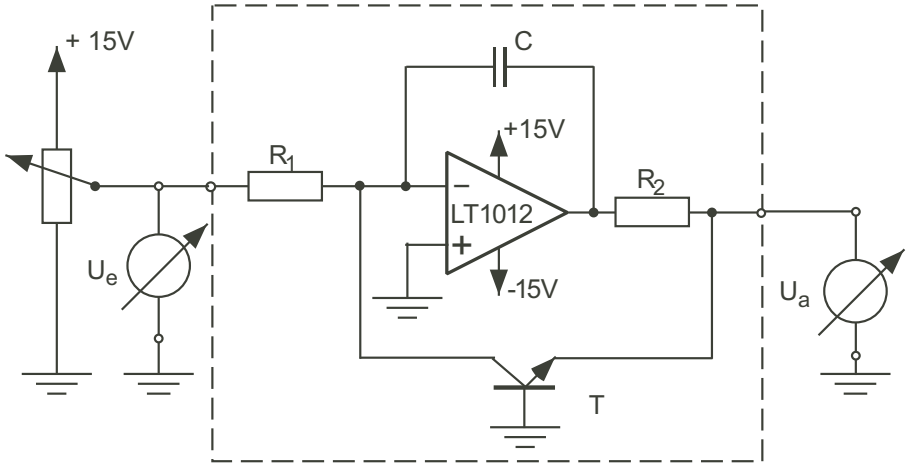


Abbildung 8.11: Schaltung zum Ausmessen der Kennlinie des Logarithmierers.Als Regelwiderstand am Eingang des Verstärkers das 10-Gang Potentiometer verwenden. Zur Messung von U_e das Simpson Digitalvoltmeter (DVM) und für U_a das Metravo 2 Meßgerät verwenden.

Das physikalische Grundprinzip der in Abbildung 8.11 dargestellten Schaltung (im strichlierten Kasten) wurde ja schon in Kapitel 8.2.4 ausführlich erklärt. Dazu kommen nun noch zwei Multimeter, eines am Eingang und eines am Ausgang der Schaltung, zur Messung der Ein- respektive der Ausgangspannung (U_e und U_a). Für das Multimeter am Ausgang das Gerät mit der geringeren Auflösung verwenden (Zeigerinstrument), da das bessere auflösende Gerät am Eingang benötigt wird (Digitalvoltmeter). Die Eingangsspannung wird durch ein Potentiometer von der Betriebsspanung (+15 V) abgegriffen.

8.3.3 Aufnahme der Kennlinie des Logarithmierers

- Es ist die Kennlinie des Logarithmierers, also U_a in Anhängigkeit von U_e aufzunehmen. Dazu verwenden Sie die in Abbildung 8.11 dargestellte Schaltung. Versuchen Sie von $U_e = 15\,\mathrm{V}$ abwärts bis etwa $U_e = 0{,}1\,\mathrm{mV}$ (5 Dekaden) die logarithmierende Eigenschaft der Schaltung zu bestätigen. Messen Sie die Ausgangsspannung für 20 und 30 Werte für U_e, welche auf einer logarithmischen Skala etwa den gleichen Abstand haben.

- Tragen sie die Resultate in einem einfach-logarithmischen Diagram ein und bestimmen Sie die Steigung ΔU_a pro Dekade U_e aus diesem Diagram. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Rechnung aus Aufgabe 2.

8.3.4 Spitzenwertgleichrichter

Um den Frequenzgang einer elektrischen Schaltung zu messen muß man die Amplitude der Sinusschwingung messen. Dies macht man mit einem Spitzenwertgleichrichter. Die Schaltung ist in Abbildung 8.12 wiedergegeben. Solange die Eingangsspannung $U_e < U_a$ ist, sperrt die Diode D. Für $U_e > U_a$ leitet die Diode, und über die Gegenkopplung wird $U_e = U_a$.

Aufgrund dieser Eigenschaft lädt sich der Kondensator C auf den Spitzenwert der Eingangsspannung auf. Diese Schaltung hat den Vorteil, daß sie einen hohen Eingangswiderstand aufweist und somit keine Belastung auf die Spannung U_e ausübt. Der Spitzenwertgleichrichter ist schon auf einer Platine aufgebaut, Sie müssen nur mehr die Versorgungsspannung sowie den Ein- und Ausgang verdrahten. Das Schaltbild auf der Platine ist allerdings gegenüber Abbildung 8.10 vereinfacht dargestellt. Als Lastwiderstand des Spitzenwertgleichrichters wird der Eingangswiderstand des Logarithmierers wirken.

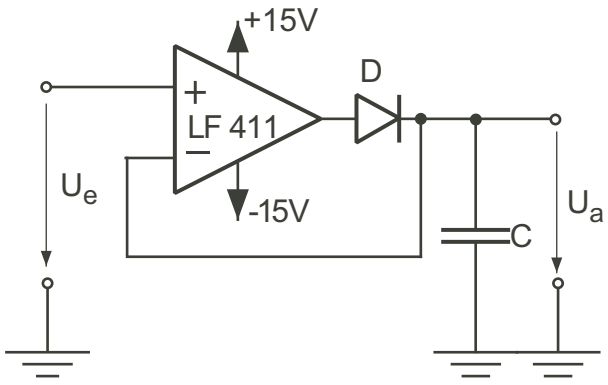


Abbildung 8.12: Spitzenwertgleichrichter. Der Operationsverstärker dient zum entkoppeln des Gleichrichters von der vorangehenden Schaltung.

8.3.5 Hochpaß

Mit den im Praktikumsversuch Elektronik I erworbenen Kenntnissen dimensionieren Sie nun einen kapazitiven Hochpaß mit einer Grenzfrequenz im Bereich von etwa $f_g = 7\,\text{kHz}$ bis $f_g = 34\,\text{kHz}$. Bauen Sie den Hochpaß auf und überzeugen Sie sich kurz von seiner Funktion indem Sie eine Wechselspannung am Eingang des Hochpasses anlegen und das Ausgangssignal am Oszilloskop für verschiedene Frequenzen aufnehmen.

8.3.6 Abschlußmessung

Schalten Sie gemäß Abbildung 8.1 die einzelnen Komponenten in Serie, also den Frequenzgenerator, den Hochpaß, den Spitzenwertgleichrichter und den Logarithmierer Schaltung (Schaltung im strichlierten Kasten der Abbildung 8.11, ohne äußere Beschaltung). Nehmen Sie auf dem Oszilloskop den Frequenzgang des Hochpasses in doppelt-logarithmischen Maßstab auf, indem Sie den Frequenzgenerator logarithmisch durchlaufen lassen. Versuchen Sie rund um die Grenzfrequenz f_g ein oder mehrere Dekaden in der Frequenz aufzunehmen (speziell in Richtung zu den tiefen Frequenzen hin). Achten Sie darauf, daß Sie den Arbeitsbereich Ihres Logarithmieres gut ausnützen. Drucken Sie das erhalten Bild auf dem Drucker aus und beschriften Sie die Achsen mit den tatsächlichen Frequenz– und Verstärkungswerten. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit Ihren Ergebnisse des Elektronik I Praktikumversuches.

- Bestimmen Sie die Grenzfrequenz Ihres Hochpasses aus Ihrer Messung.
- Bestimmen Sie die Steigung Ihres Hochpasses in dB/Dekade aus Ihrer Messung.

8.3.7 Zusatz

Wenn noch Zeit verbleibt, versuchen Sie einen induktiven Hochpaß, oder auch Tiefpässe mit obiger Schaltung zu vermessen.

Literaturverzeichnis

[1] Elektronik I Skriptum (mitbringen)

[2] Titze, U. und Schenk, Ch.: *Halbleiter-Schaltungstechnik* (Springer).
Bibliothek ExWi: PFA 153–156, PFA 201, PFA 204.

[3] Frauenfelder/Huber:*Physik II* (Ernst Reinhardt Verlag Basel).
Bibliothek ExWi: ODD 113.

[4] J.A. Edminster: *El. Netzwerke* (Schaum-Kette).
Bibliothek ExWi: PFA 144.

Kapitel 9

Magnetische Hysteresis

9.1 Grundlagen

Für statische magnetische Felder im Vakuum gilt die Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \tag{9.1}$$

Angewendet auf eine zum Torus gekrümmte Spule gibt dies für das Magnetfeld in ihrem Inneren

$$H = \frac{N\,I}{2\,\pi\,r_m} \tag{9.2}$$

wobei N die Zahl der Windungen der Spule, I die Stromstärke in der Spule und r_m der mittlere Radius des Torus bedeuten.
Für den materieerfüllten Raum existiert eine Magnetisierung M (magnetisches Dipolmoment pro Volumenseinheit), welche von der Art des Materials abhängt. Der Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion B und Magnetfeld H lautet in diesem Fall

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \vec{H} \tag{9.3}$$

mit χ_m der magnetischen Suszeptibilität[1]. In Gleichung 9.3 resultiert der Anteil von den externen Quellen und der Anteil von der Magnetisierung des Materials. Die Suszeptibilität ist eine dimensionslose Zahl[2], welche negativ für diamagnetische und positiv für paramagnetische Materialien ist. Durch Einführen der relativen magnetischen Permeabilität μ_r lässt sich Gleichung 9.3 auch wie folgt schreiben

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \tag{9.4}$$

Im Falle von isotropen dia- oder paramagnetischen Stoffen ist μ_r eine Materialkonstante. Für die hier betrachteten ferromagnetischen Stoffe hängt μ_r aber in komplizierter Weise vom Magnetfeld H sowie von der Vorgeschichte des Materials ab. Ziel dieses Praktikumsversuches ist es diesen Zusammenhang, also die Hysterese, experimentell zu bestimmen.
Um einen wohldefinierten Ausgangszustand des zu untersuchenden Materials zu erhalten, muss man das Material zuerst entmagnetisieren. Dies gelingt unter anderem durch Erhitzen des Materials auf Temperaturen oberhalb der Curietemperatur T_C ($T_C(\mathrm{Fe}) = 1043\,\mathrm{K}$) und langsames Abkühlen in einer Umgebung mit niedrigem magnetischen Feld. Oberhalb der Curietemperatur gilt das Curie-Weiss Gesetz

$$\chi_m = \frac{C}{T - T_C} \tag{9.5}$$

Eine weitere Möglichkeit zur Entmagnetisierung des Materials ist rasches Ummagnetisieren mit abnehmender Amplitude des Spulenstromes.
Beginnend mit entmagnetisiertem Material nehmen bei Erhöhung des Spulenstromes, d.h. bei Erhöhung von H, die Magnetisierung M und damit auch die magnetische Induktion B sowie die Permeabilität μ_r rasch zu (siehe Abb. 9.1). Bei höheren Werten von H nimmt M langsamer

[1] Die magnetische Suszeptibilität hat keine physikalische Entsprechung in der elektrischen Suzeptibilität, obwohl hier das gleiche Symbol verwendet wird.

[2] Unsere Diskussion nimmt an, dass das Material isotrop ist. Reale Materialien, auch Kristalle, sind aber anisotrop und die Suszeptibilität und die Permeabilität sind Tensoren zweiter Ordnung. Dies kann man im Rahmen dieser Arbeit aber vernachlässigen.

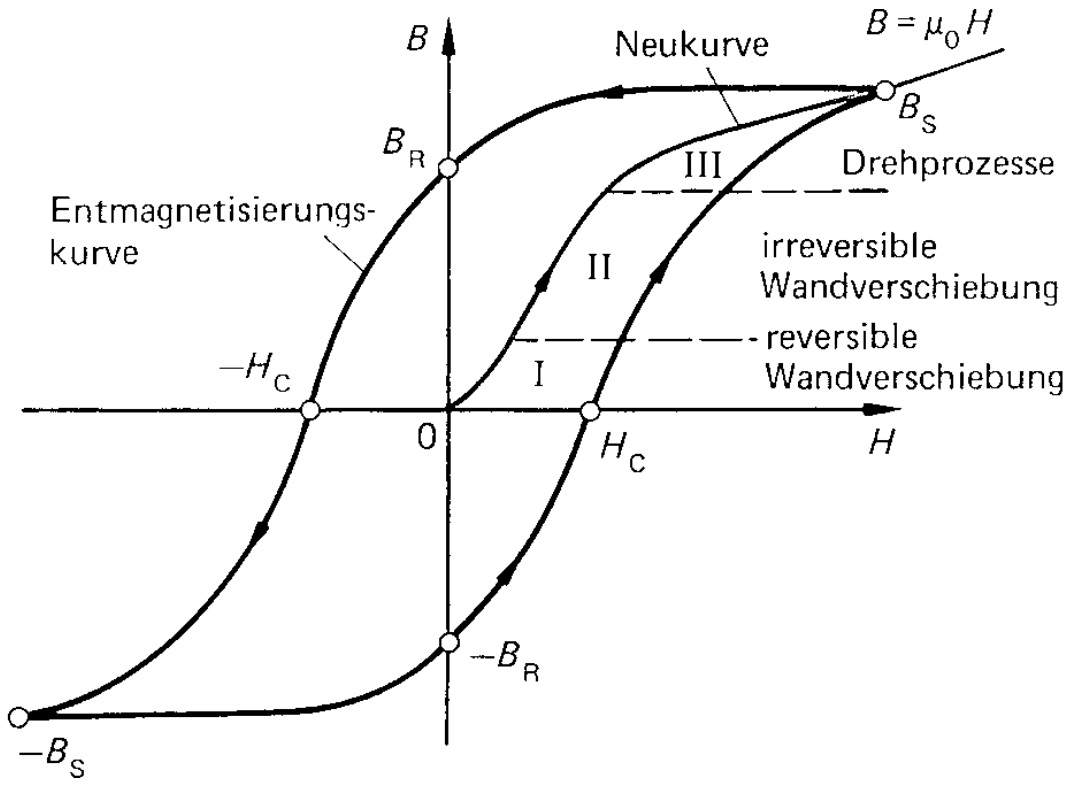


Abbildung 9.1: Hysteresisschleifen der Magnetisierung M und der magnetischen Induktion B in Abhängigkeit des Magnetfeldes H.

zu und erreicht schliesslich bei H_s ihren Sättigungswert, die Sättigungsmagnetisierung M_s respektive die Sättigungsinduktion B_s. Der so erhaltene Zusammenhang $M(H)$ beziehungsweise $B(H)$ heisst Neukurve. Oberhalb von H_s sind alle Elementarmagnete im Material ausgerichtet und der Zusammenhang $B(H)$ wird linear.

Wird, ausgehend vom gesättigten Bereich, der Spulenstrom I und damit H nun wieder verringert, so folgt das B-Feld nicht mehr der Neukurve sondern verbleibt bei höheren Werten der Magnetisierung. Für verschwindende Erregung H wird das B-Feld nicht Null sondern verbleibt auf einen höheren Wert. Der angenommene Wert heisst Remanzfeld B_r (auch Remanenz genannt). Durch Umpolen des Spulenstromes I, also Erregung eines negativen Feldes H, fällt das B-Feld plötzlich stark ab und erreicht den Wert Null beim Koerzitivfeld H_c (auch Koerzitivkraft genannt). Bei weiterer Steigerung von H in dieser Richtung erreicht die Magnetisierung M schliesslich bei -H_s ihren negativen Sättigungswert. Reduziert man den Spulenstrom nun wieder, so erhält man eine Kurve $B(H)$, welche eine Spiegelung am Ursprung der zuvor durchlaufenen Kurve ist. Der entstehende geschlossene Kurvenzug heisst Hystereseschleife und die oben beschriebene Neukurve verläuft komplett in ihrem Inneren (siehe Abb. 9.1). Der beschriebene Zusammenhang kann nur dann reproduzierbar durchlaufen werden, wenn die Magnetisierung M auf beiden Seiten in die Sättigung getrieben wird.

Um einen vollständigen Hysteresezyklus zu durchlaufen muss eine bestimmte Arbeit A_u verrichtet werden. Die Fläche innerhalb der Hystereseschleife $B(H)$ entspricht gerade dieser Energie pro Volumenseinheit des Materials. Materialien mit breiten Hystereseschleifen, also

grossem Koerzitivfeld eignen sich deshalb gut als Dauermagneten, während man für Transformatoren Materialien mit sehr hoher Permeabilität und kleiner Fläche der Hystereseschleife verwendet um die Ummagnetisierungsverluste klein zu halten.

9.2 Aufgabenstellung

Es stehen zwei Ringkerne, ein geglühter und ein ungeglühter Kern[3], für die Messung der Hysterese zur Verfügung. Diese beiden Ringkerne sind wie folgt auf ihre magnetischen Eigenschaften hin zu untersuchen:

- Entmagnetisiertes Material in die positive Sättigung treiben, aus der Neukurve $\mu_r(H)$ sowie μ_{max} bestimmen, sowie eine graphische Darstellung von $\mu_r(H)$ anfertigen.
- Die magnetische Flussdichte B ist für einen vollständigen Magnetisierungszyklus als Funktion der magnetischen Feldstärke H zu bestimmen, wobei positive und negative Sättigung zu erreichen sind. Ausserdem ist eine graphische Darstellung von $B(H)$ anzufertigen.
- Aus dem Hysteresezyklus sind die Grössen M_s (Sättigungsmagnetisierung), B_r (Remanenzfeld), H_c (Koerzitivfeld) und A_u (Ummagnetisierumgsarbeit pro Zyklus) zu bestimmen.

9.3 Messung der Magnetisierung

9.3.1 Entmagnetisierung der Ringkerne

Damit eine Neukurve aufgenommen werden kann, müssen die Ringkerne zuerst vollständig entmagnetisiert werden. Dazu verwenden Sie eine variable Wechselspannung, welche über einen Variac an den Ringkern angelegt wird. Ein Variac, auch Autotransformator genannt, ist ein Transformator mit einstellbarer Untersetzung. Die Untersetzung gibt das Verhältnis von Ausgangsspannung zur Eingangsspannung an und kann im Bereich von 0 bis etwa 1.1 variiert werden. Beachten Sie, dass ein Variac keine galvanische Trennung zwischen Primär- und Sekundärseite hat, im Unterschied zu festen Transformatoren. Zur Entmagnetisierung verwenden Sie die in Abb. 9.2 angegebene Schaltung.

Vorgehen zur Entmagnetisierung eines Kernes:

- Variac auf Nullstellung, Widerstand auf Nullstellung und überbrückt (graue Linie)
- Primärspule des Ringkernes und Ampèremeter anschliessen
- Variac einschalten und Spannung langsam erhöhen (auf zirka 75 V), bis maximal 4 A Strom fliessen

[3] Jede Kaltbearbeitung beeinträchtigt die magnetischen Eigenschaften des Materials in hohem Masse durch das Auftreten von Defekten im Kristallgitter. Ähnliches tritt auch nach dem Giessen des Kernes auf. Im wesentlichen reduziert sich die Permeabilität und die Remanenz erhöht sich als Folge dieser Defekte. Durch Glühen des Objektes bei hohen Temperaturen (900 °C und mehr), eventuell in speziellen Gasatmosphären (Stickstoff, Wasserstoff), kann man dem Material seine ursprünglichen magnetischen Eigenschaften zurückgeben.

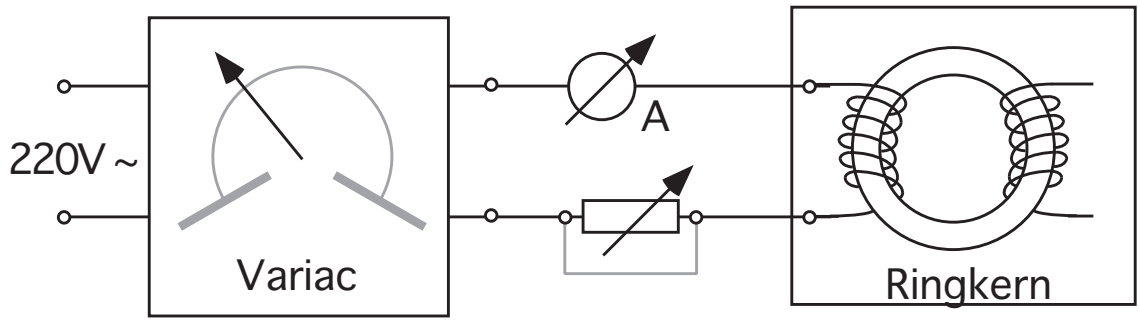


Abbildung 9.2: Schaltung zur Entmagnetisierung der Ringkerne. **Achtung: Die Sekundärseite des Ringkernes bleibt unbeschaltet!**

- Variac langsam auf Nullstellung zurückdrehen
- Überbrückung öffnen und Widerstand auf Maximalwert hochfahren, was den Strom ganz auf Null bringt (bei Variac=0 kommt eventuell noch ein Reststrom)
- Variac abschalten und vom Netz trennen
- Spule abkühlen lassen

Aufgabe: Erklären Sie den hier beschriebenen Entmagnetisierungsvorgang mittels physikalischer Effekte.

9.3.2 Messschaltung für den Magnetisierungszyklus

Für die eigentliche Messung wird der Ringkern mit einem Gleichspannungsnetzgerät primärseitig versorgt. Durch Ändern des Widerstandswertes in der Zuleitung (Widerstandsdekade[4], R_i), bei konstanter Einstellung des Netzgerätes, ändert man den Strom durch die Primärspule und damit das Magnetfeld H. Der Integrator misst nun den Ladungspuls, welcher beim Umschalten von einem Widerstandswert zum nächsten in der Sekundärspule induziert wird. Die dazu verwendete Schaltung ist in Abb. 9.3 angegeben. Die Details der Beschaltung des Integrators entnehmen Sie der Abb. 9.4.
Das tatsächliche Innenleben des Integrators ist allerdings um einiges komplizierter als in Abb. 9.4 dargestellt. Für das Verständnis der Funktionsweise des Integrators sind diese Details jedoch nicht notwendig. Überlegen Sie sich die Funktionsweise des Integrators ([6] *Tietze & Schenk, Kapitel Operationsverstärkeranwendungen*).
Auf dem Speicheroszilloskop werden gleichzeitig die Ausgangsspannung $u_2(t)$ und das Integral $U_a(t)$ dargestellt und es wird auf $u_2(t)$ getriggert (Auslösen der Zeitablenkung[5]). Ein typisches Messergebnis aus dieser Messserie ist in Abb. 9.5 dargestellt. $TR1$ ist der Spannungspuls $u_2(t)$, $TR2$ ist der Ausgang vom Integrator $U_a(t)$. Mit den Cursor-Messhilfen des Oszilloskopes

[4]Widerstandsdekade bezeichnet einen über ein oder mehrere Dekaden (deka, griechisch 10) verstellbaren Widerstand, welcher in Stufen und meist auch sehr präzise einstellbar ist.

[5]Eine mögliche Methode, welche nicht auf das Triggern durch $u_2(t)$ angewiesen ist, besteht darin, die Zeitskala für $U_a(t)$ mehrere Sekunden pro Einheit einzustellen und frei laufen zu lassen. Bedenken Sie, dass dies nur eine Abhilfe darstellt wenn Sie mit dem Betrieb des Oszilloskopes Mühe haben und keine optimale Messung darstellt.

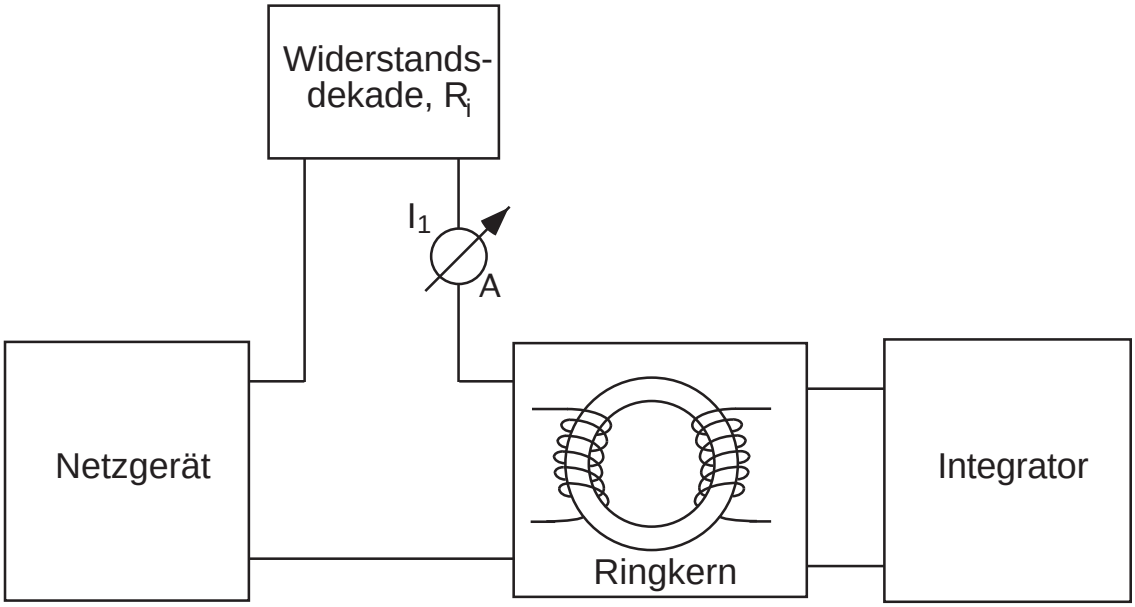


Abbildung 9.3: Messschaltung für den Magnetisierungszyklus

wird nun der Spannungssprung von $U_a(t)$ ausgemessen. Zusätzlich ist am Integrator noch ein Ausgang für ein Digitalvoltmeter (DVM) vorgesehen. Damit kann der abgelesene Wert vom Oszilloskop überprüft werden. Dies funktioniert aber nur bei grossen Signalen, da der Integrator den Messwert nicht beliebig lange halten kann und der Wert am DVM langsam auf Null fällt.
Achtung: Der Integrator kann nur positive Eingangsspannungen verarbeiten. Sie müssen dies bei der Messung entsprechend berücksichtigen und die Sekundärspule in passender Polarität an den Integrator anschliessen. Stellen Sie die Polarität mit dem Oszilloskop fest.
Die Details des Innenlebens der Ringkerne sind in der Abb. 6 dargestellt. Die Primärspule ist mit einer 4 A Sicherung träge gegen Überstrom abgesichert. Sekundärseitig stehen verschiedene Ausgänge zur Verfügung. Üblicherweise wird man den Ausgang mit n_2=100 Windungen für die Messung verwenden. Ist das Ausgangssignal jedoch zu gross muss man zu kleineren Windungszahlen wechseln (n_2=50 oder n_2=10). Dies erkennt man am Übersteuern des Integrators.

9.3.3 Messung der Neukurve

Nach erfolgreich abgeschlossener Entmagnetisierung:

- Polwender auf Null stellen, Netzgerät anschließen
- Polwender am Netzgerät auf positiv stellen (1. Messung)
- Schrittweise Reduktion von R_i der Widerstandsdekade von 925 Ω – 0 Ω

Misslingt eine Messung, so ist der Kern wieder zu entmagnetisieren und von neuem zu beginnen.

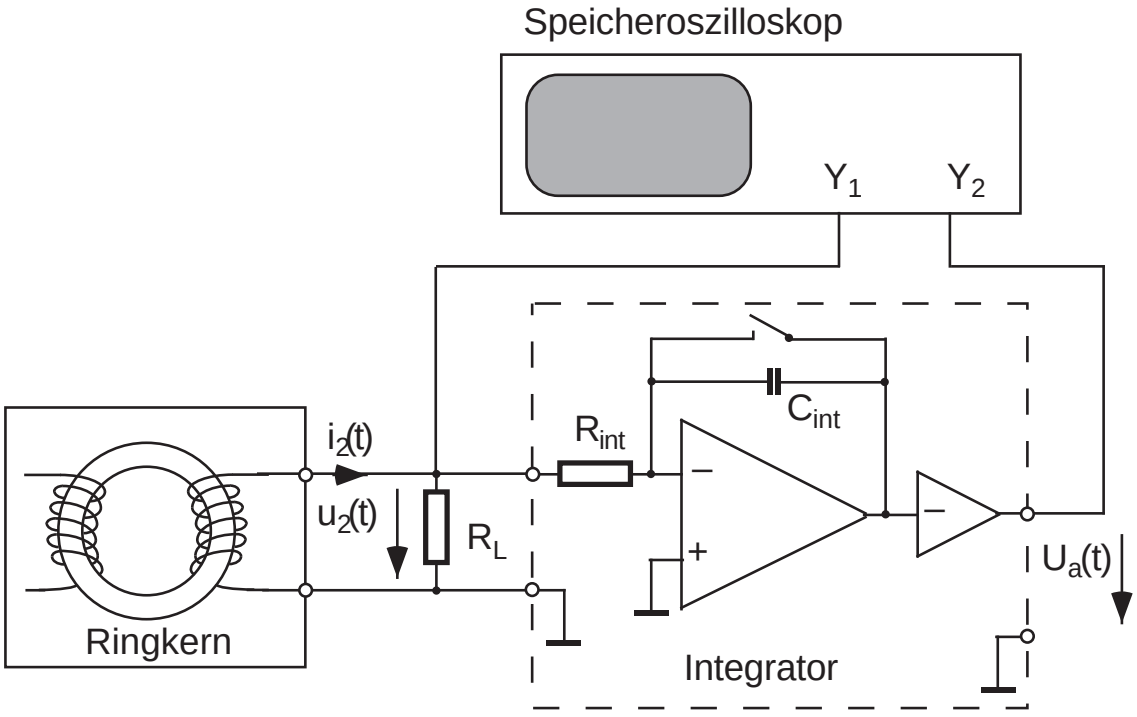


Abbildung 9.4: Details der Schaltung und der äusseren Zusatzelemente des Integrators.

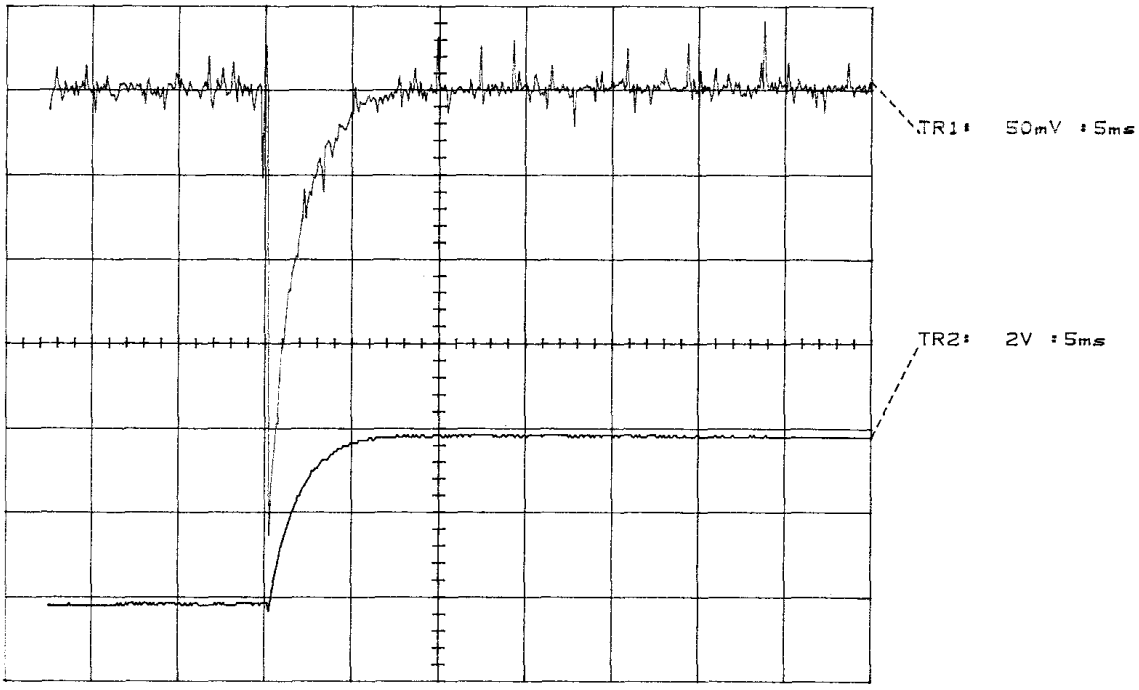


Abbildung 9.5: Typisches Messergebnis beim Ändern von R_i um eine Stufe aus einer Messserie (Papierausdruck des Speicheroszilloskope). $TR1$ ist das Signal $u_2(t)$ und $TR2$ ist das Signal $u_a(t)$, die beigefügten Werte sind die Einheiten pro Skaleneinheit.

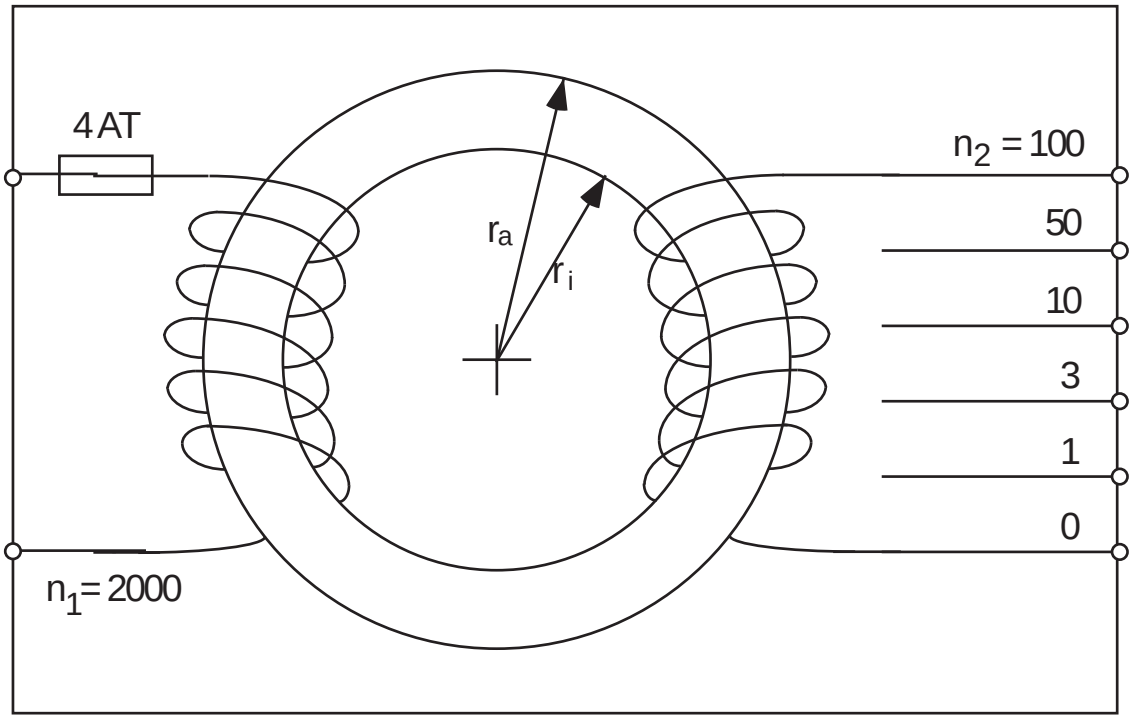


Abbildung 9.6: Innenleben der Ringkerne: n_1 ist die Zahl der Primärwindungen, n_2 die Zahl der Sekundärwindungen und 4 AT steht für eine 4 A Sicherung träge.

9.3.4 Messung der Hystereseschleife

- Verbindung der Sekundärspule auf den Integrator umpolen
- Schrittweise Erhöhung von R_i von $0\,\Omega$ – $925\,\Omega$
- Polwender am Netzgerät auf Null stellen (1. Messung)
- Polwender am Netzgerät auf negativ stellen (1. Messung)
- Schrittweise Reduktion von R_i von $925\,\Omega$ – $0\,\Omega$
- Verbindung der Sekundärspule auf den Integrator umpolen
- Schrittweise Erhöhung von R_i von $0\,\Omega$ – $925\,\Omega$
- Polwender am Netzgerät auf Null stellen
- Polwender am Netzgerät auf positiv stellen
- Schrittweise Reduktion von R_i von $925\,\Omega$ – $0\,\Omega$

Misslingt eine Messung, so ist der Kern wieder zu entmagnetisieren und von vorne, oder zumindest beim letzten zurückliegenden Sättigungswert erneut zu beginnen.

9.4 Auswertung

Das Magnetfeld des Primärstromes ist

$$H_i = \frac{N_1 I_1}{2\pi r_m} \tag{9.6}$$

wobei N_1 die Anzahl der Windungen auf der Primärwicklung, I_1 der Primärstrom und r_m der mittlere Kernradius sind.

$$r_m = \frac{1}{2}(r_a + r_i) \tag{9.7}$$

Die Änderung der magnetischen Induktion ist

$$\Delta B_i = -\frac{q_i}{N_2 F}(R_L + R_S) \tag{9.8}$$

wobei N_2 die Anzahl der Windungen auf der Sekundärseite, F die Querschnittsfläche des Ringkernes, q_i der induzierte Ladungspuls und R_S der Innenwiderstand der Spule sind. Der Ladungspuls ergibt sich aus dem Integral des Sekundärstromes

$$q_i = \int i_2(t)\,dt = \frac{1}{R_L}\int u_2(t)\,dt \tag{9.9}$$

und wird mit dem Integrator gemessen. Die Ausgangsspannung des Integrators U_a ist

$$U_a = -\frac{1}{R_{int}C_{int}}\int_0^\infty u_2(t)\,dt \tag{9.10}$$

wobei man hier auch die Polarität der angelegten Eingangsspannung berücksichtigen muss. Somit erhält man für den Ladungspuls

$$q_i = -\frac{R_{int}C_{int}}{R_L}U_a(i) \tag{9.11}$$

Die magnetische Induktion ergibt sich dann als

$$B = \sum_i \frac{1}{N_2 F}(R_L + R_S)\left(\frac{R_{int}C_{int}}{R_L}U_a(i)\right) \tag{9.12}$$

Für $R_S << R_L$ ergibt sich

$$B = \sum_i \frac{1}{N_2 F}(R_{int}C_{int}U_a(i)) \tag{9.13}$$

Aufgabe: Leiten Sie diese Formel aus dem Induktionsgesetz her.

Literaturverzeichnis

[1] Busch, 13. Auflage, Kapitel 35, Seite 246 ff, Depot Physik

[2] Feynman Lectures on Physics, II-36-6

[3] Eder, Elektrodynamik, Seite 116 ff

[4] Kittel, 6. Auflage, Einführung in die Festkörperphysik, 507 ff

[5] M.A. Omar, Elementary Solid State Physics, Chapter 9

[6] Tietze & Schenk, 3. Auflage, Halbleiterschaltungstechnik, 203 ff

Kapitel 10

Einführung in LABVIEW

10.1 Einleitung

Diese Einführung soll den Zugang zur umfangreichen LabVIEW-Umgebung etwas einfacher gestalten. Ziel ist es, mittels einfacher Beispiele die wichtigsten Eigenschaften der LabVIEW Programmierung kennenzulernen. Die Beispiele in Kapitel 10.6 sind bewusst sehr einfach gehalten, um den ungeübten Programmierern den Einstieg zu erleichtern. Fühlt sich jemand unterfordert, so soll er/sie einfach gewisse Schritte überspringen oder gleich mit Kapitel 10.8 beginnen. Für die anderen empfiehlt es sich, die nachfolgenden Beispiele vor Beginn der eigentlichen Praktikumsaufgabe selber zu Programmieren. In Kapitel 10.8 wird eine Übersicht über die verschiedenen Arten der Datenerfassung gegeben. Dieses Kapitel ist wichtig für das Verständnis der Praktikumsaufgabe. Die Praktikumsaufgabe selber ist in Kapitel 10.9 zu finden.

10.2 Was ist LabVIEW?

LabVIEW ist eine Programm-Entwicklungsumgebung wie C oder BASIC. Während aber in den letzteren text-orientierte Programme erstellt werden, stellt LabVIEW dazu eine grafisch orientierte Methode zur Verfügung. Man nennt diese graphische Syntax G. LabVIEW-Programme werden Virtual Instruments (VI) genannt. Dies weil sie sich von der Erscheinung und Anwendung her an echten Instrumenten orientieren. LabVIEW enthält viele vorprogrammierte VI, die man als Unterprogramme (SubVI) verwenden kann. LabVIEW eignet sich bestens für die Steuerung von Geräten oder der Datenerfassung und der Verarbeitung, Analyse und Darstellung von Messdaten.

10.3 Aufbau von LabVIEW

In LabVIEW gibt es drei wichtige Komponenten, mit denen man bei der Programmierung zu tun hat:

- Front Panel, das Benutzerinterface (Eingabe/Ausgabe von Variablen)
- Block Diagram, das eigentliche Programm
- Connector und Icon, die Schnittstelle und das Symbol, um ein LabVIEW-Programm (VI) als Unterprogramm (SubVI) aufzurufen.

10.3.1 Front Panel

Beim Starten von LabVIEW werden zwei Windows angezeigt. Dasjenige mit Untitled 1 Front Panel ist das Front Panel. Das Front Panel dient zur Ein- und Ausgabe von Daten und ist wichtig, wenn man Messungen und Experimente vornehmen will. Wenn jemand als Anwender ein bereits programmiertes VI braucht, dann muss er, wenn das VI gut programmiert ist, nur mit dem Front Panel arbeiten. So wie auch bei PASCAL oder BASIC ein Anwender den Quelltext nicht mehr ändern muss, sondern alle notwendigen Eingaben beim Ablauf des Programms eingestellt werden.

10.3.2 Block Diagram

Das Block Diagram ist am Anfang mit Untitled 1 Block Diagram angeschrieben. Das Block Diagram ist das eigentliche, in G geschriebene Programm. Es entspricht dem Quelltext in BASIC oder C.

10.3.3 Connector und Icon

Connector und Icon befinden sich in der rechten oberen Ecke des Front Panels und des Block Diagrams. Dabei kann das Standardicon so editiert werden, dass es die Funktion des VI symbolisch repräsentiert. Der Connector erlaubt die Zuordnung der Ein- und Ausgabeobjekte und dient der Variablenübergabe, wenn das VI als Unterprogramm in einem Block Diagram benutzt wird.

10.4 Wie startet man LabVIEW und wie geht man mit den Macs um?

Nach dem Aufstarten des PowerMac G5 , erscheint ein Login Fenster. Hier muss unter *StudentX* das Passwort, das euch der Assistent gibt, eingegeben werden. Nach der Eingabe seht ihr den Schreibtisch mit der Menüleiste oben und dem sogenannten *Dock* unten. Rechts oben ist die Harddisk *Macintosh HD*. Unten im Dock findet ihr das Programm LabVIEW. Durch drücken auf das LabVIEW icon wird das Programm gestartet. Zuerst erscheint ein Fenster, wo ihr ein neues VI starten oder die letzten gespeicherten Programme aufrufen könnt.

10.5 Richtlinien zum Gebrauch der Macs

Es stehen jeweils 4 Computer zur Verfügung: physpraktX mit den Benutzernamen Student1 bis Student8. Die Computer sind über ein internes Netz miteinander verbunden, an dem auch ein Drucker angeschlossen ist. Die Computer sind so konfiguriert, dass sie für das Praktikum mit LabVIEW optimal verwendet werden können. Entsprechend ist es untersagt im Systemordner Einstellungen zu verändern. Eure Programme könnt ihr im Ordner *LabVIEW Prakt* im Benutzerordner *StudX* abspeichern. Bitte eröffnet dafür einen neuen Ordner in diesem Verzeichnis mit eurem Namen. Falls es aus Ordnungs- oder Platzgründen notwendig erscheint, werden die Dateien später ohne Rücksprache gelöscht.

10.6 Beispiele

10.6.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt werden Beispiele vorgestellt. Das erste ist ein Demo-Programm aus den LabVIEW-Standardbeispielen. Dieses VI sollte als erstes untersucht werden. Anschliessend werden kleinere Programme vorgestellt, die ihr selber programmieren könnt.

Demo-Programm TankSimulation.vi

Das Demo-Programm befindet sich im Ordner:
LabVIEW Prakt/Tankmtr.dlb

Das Front Panel könnt ihr in Abb. 10.1 sehen, das Block Diagram in Abb. 10.2
Nach dem Öffnen lassen wir das VI am besten gleich laufen und verändern dabei alle

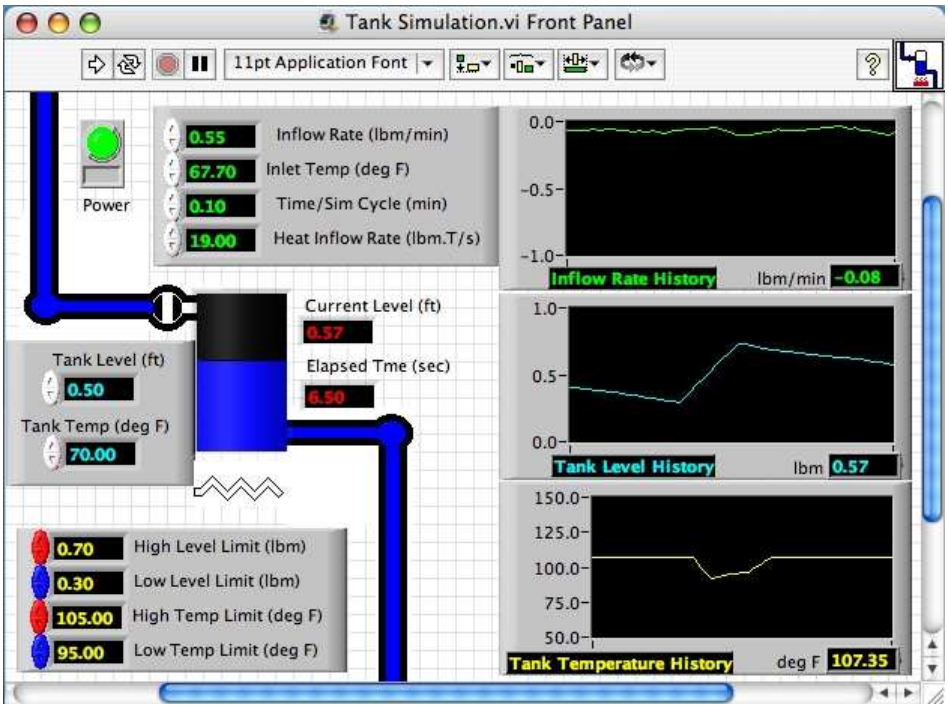


Abbildung 10.1: Front Panel von TankSimulation.vi

möglichen Einstellungen so, dass wir mit der Funktionsweise vertraut werden. Es geht darum, einen Tankinhalt innerhalb eines vorgegebenen Temperaturfensters zu halten. Diverse Grössen wie Einfluss, Einflusstemperatur, Tankniveau und dessen Temperatur können eingestellt werden.
Wenn wir mit dem Front Panel vertraut sind, öffnen wir das Diagramm Fenster. Mit Hilfe der Anschriften im Diagramm sollte es möglich sein, die Elemente im Front Panel mit den entsprechenden Elementen im Block Diagram zu identifizieren. Es ist dabei nicht nötig, alle Details zu verstehen.
Sehr hilfreich kann das Ablaufen des Programms im „Zeitluppentempo“sein. Man muss dazu die Glühbirne anklicken. Im Block Diagram lässt sich dann der Datenlauf anhand von wandernden, gelben Punkten verfolgen. Dies ist eine von vielen hilfreichen Debug-Techniken für später. Wer das Programm noch langsamer ablaufen lassen will, kann auf das Icon mit dem horizontalen Strich klicken. Nach jedem Datenlauf verlangt das Programm eine Bestätigung durch Klicken auf das Icon links von der Glühbirne.
Schliesslich soll das VI geschlossen werden, **ohne möglicherweise gemachte Änderungen zu speichern**.

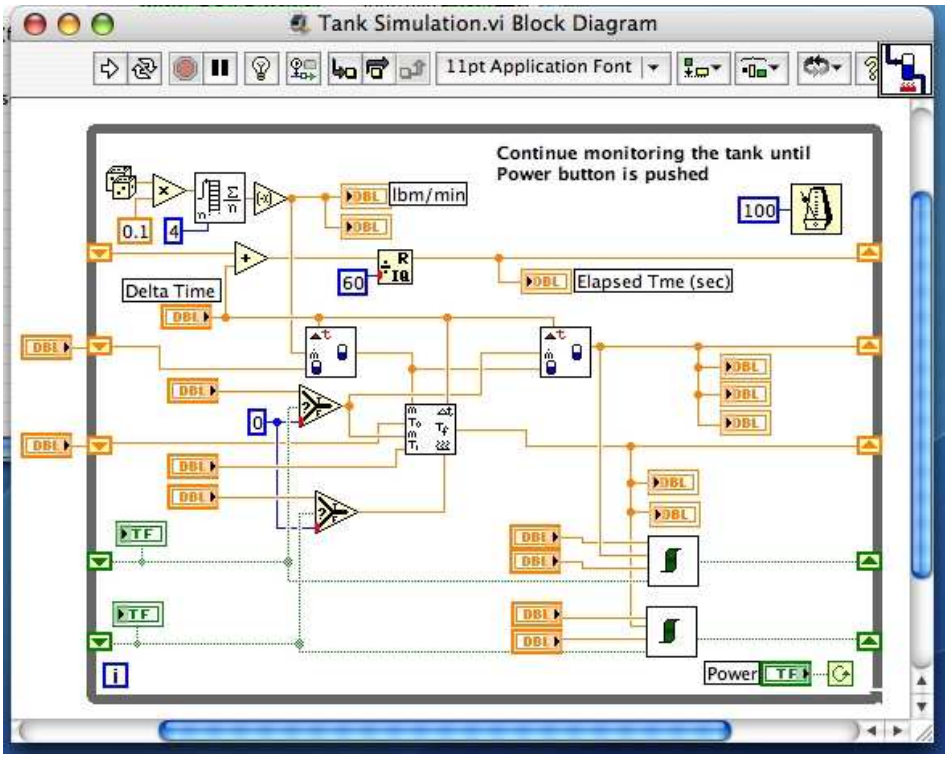


Abbildung 10.2: Block Diagram von TankSimulation.vi

10.6.2 Ein- und Ausgabe

Wir beginnen mit dem Einfügen einer digitalen Eingabe und Ausgabe. Dazu öffnen wir ein neues VI, indem ihr im File Menü auf new VI drückt. Dann braucht man die Controls Palette. Ist sie nicht sichtbar, so wählt man im Menu View den Befehl Controls Palette (Achtung: Eingaben und Ausgaben können nur im Front Panel eingefügt werden und die Controls Palette erscheint nur wenn das Front Panel angewählt ist). Um eine digitale Eingabe zu kreieren, wählt man in der Controls Palette unter Modern das Icon Numeric und dort den Numerical Control (siehe Abb. 10.3) und legt ihn auf dem Front Panel ab. Dieser *Numerical Control* kann wie auch alle anderen Objekte der Controls Palette nach dem Platzieren angeschrieben werden (fakultativ). Wir nennen ihn für dieses Beispiel *Eingabe*.

Das Einfügen der digitalen Ausgabe geschieht auf identische Weise. Wir wählen dann einfach statt dem *Numerical Control* einen Numerical Indicator und nennen ihn *Ausgabe*.

Das Front Panel sollte nun wie in Abb. 10.4 aussehen. Hinter dem Front Panel sieht man das Block Diagram, wo sowohl die Eingabe wie auch die Ausgabe als Icons sichtbar sind. Für jede Anzeige, Schalter, Drehknopf usw. im *Front Panel* gibt es den entsprechenden *Terminal* als Pendant im Block Diagram.

Für ein erstes kleines Programm verbinden wir die Ein- und die Ausgabe im Block Diagram mit einem *Draht*. Dafür verwendet man die *Drahtspule*, welche in der Tools Palette Tools ist (zu finden unter View, Tools Pallete, Abb. 10.5). Dabei müssen im Block Diagram die *Ein-* und die *Ausgabe* miteinander verbunden werden. Durch das Verdrahten der *Terminals* mit der *Drahtspule* wird der Datentransfer erst möglich. Nun könnt ihr im Front Panel die Eingabe

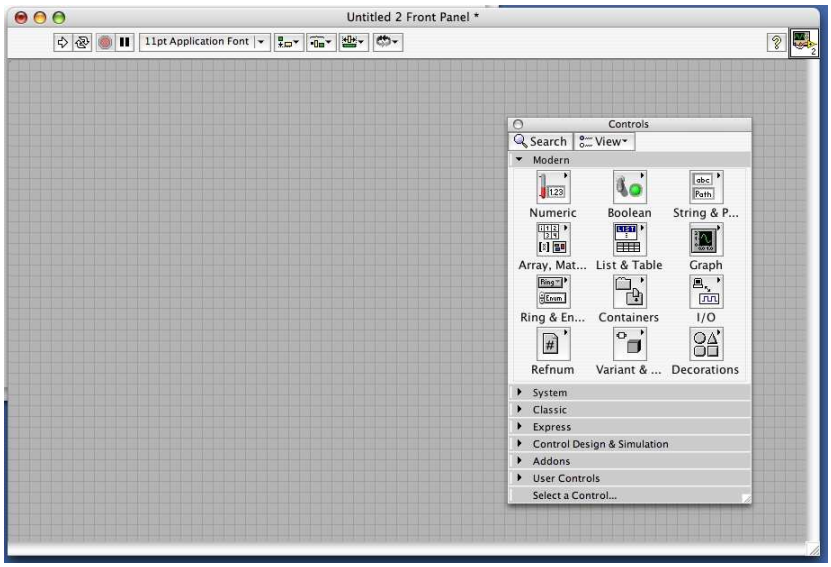


Abbildung 10.3: Controls Palette.

verändern und seht wie sich bei jedem Ausführen des Programms die Ausgabe entsprechend verändert. Gestartet wird ein LabVIEW VI indem auf das Pfeilsymbol oben links geklickt wird.

10.6.3 Zufallszahlen

Wir werden jetzt das obenstehende Programm um einen Zufallsgenerator erweitern. Dazu brauchen wir die Functions Palette, siehe Abb. 10.6. Ist sie nicht vorhanden, so wählt man im Menü View den Befehl Functions Palette (Analog zur Controls Palette für das Front Panel kann die Functions Palette nur im Block Diagram verwendet werden). In dieser Functions Palette findet man unter Mathematics das Icon Numeric, wo wir die Funktion Random Number (0-1) (dargestellt als zwei Würfel) finden. Wir bringen sie auf das Block Diagram.

Nun muss die generierte Zufallszahl an die Ausgabe weitergeleitet werden. Dazu brauchen wir wieder die Drahtspule aus der Tools Palette. Verbinden wir den Würfel mit der Ausgabe, so wird die Zufallszahl an die Ausgabe weitergeleitet. Abb.10.7 zeigt das Block Diagram.

Um das Programm zu starten, kehrt man ins Front Panel zurück und drückt auf den Pfeil oben links. Die Zufallszahl erscheint nach jedem Ablauf des Programms in der Ausgabe.

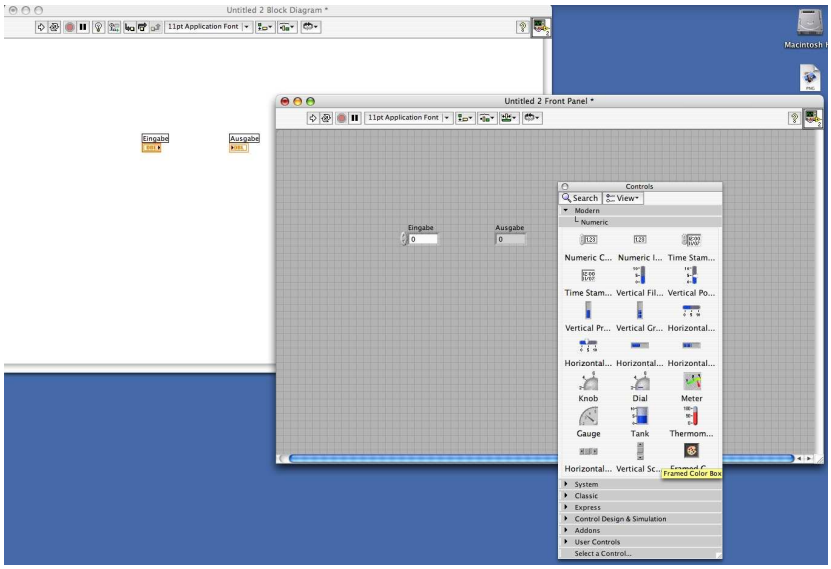


Abbildung 10.4: Front Panel nach Einfügen der Ein- und Ausgabe. Im Hintergrund ist das Block Diagramm mit den beiden Icons Ein- und Ausgabe.

Abbildung 10.5: Die Tools Palette, zu finden unter Windows, Show Tools Pallete

10.6.4 Kontinuierliche Generierung von Zufallszahlen

Anstatt nur einer Zufallszahl wollen wir nun kontinuierlich Zufallszahlen generieren. Dazu benützen wir eine Schlaufe (*For* oder *While Loop*). Wir beginnen mit einer For-Schlaufe, zu finden in der Functions Palette unter Programming, Structures.

For Loop

Nachdem wir den *For Loop* im Block Diagram eingefügt haben, verschieben wir den Zufallszahlengenerator und die Ausgabe in den *For Loop*. Wir können alternativ aber auch den For-Loop um die Würfel und den Ausgabe-Terminal zeichnen. Die Eingabe können wir gerade dazu verwenden, die maximale Anzahl Durchgänge festzulegen. Dafür verbinden wir die *Eingabe* mit dem N in der linken oberen Ecke der Schlaufe. Wir geben nun vor, wie oft die Schlaufe durchlaufen wird.

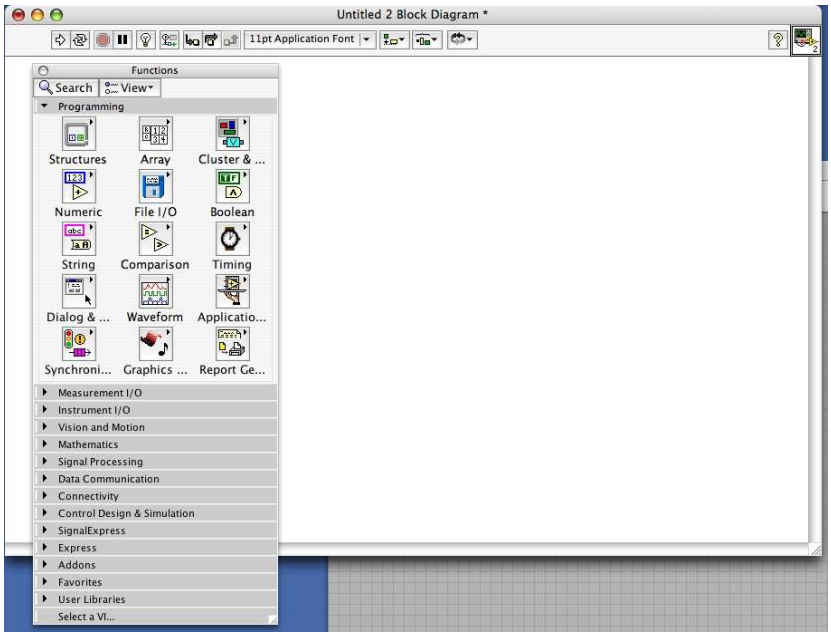


Abbildung 10.6: Die Functions Palette kann nur vom Block Diagram aus aufgerufen werden.

Abbildung 10.7: Block Diagram eines Programms, das Zufallszahlen generiert.

Für die Ausgabe müssen wir die Würfel mit der *Ausgabe* verbinden. Wenn wir jetzt das VI starten, sehen wir nur den letzten Wert, da der Vorgang zu schnell abläuft. Damit wir die einzelnen Ausgaben verfolgen können, müssen wir in der Schlaufe eine Zeitverzögerung einfügen. Dazu benötigen wir die Funktion Wait (ms), zu finden in der Functions Palette, Programming, Timing, Wait (ms)
Das Icon Wait (ms) positionieren wir im *For-Loop*. Um die Verzögerung zu definieren drücken wir bei gedrückter CTRL-Taste mit der Maus auf das Icon. Nun erscheint ein neues Menü, wo wir unter Create, eine Konstante auswählen können. Den Wert ändern kann man mit Hilfe der Tools Palette, A auswählen. Weiter machen wir ein Verbindung aus der Schlaufe hinaus, indem wir ein Draht zur Schlaufengrenze ziehen. Die fortlaufend erwürfelten Zufallszahlen können wir so zusätzlich in einem Array ausgeben:
Auf dem Front Panel fügen wir ein leeres Array ein (Controls Palette, Modern, Array). Dieses müssen wir noch mit einem Indicator, also mit einem Datentyp, füllen. Anschliessend muss das

Array im Block Diagram noch mit der Schlaufenausgabe verbunden werden. Die Zeitverzögerung ist nun nicht mehr nötig und kann daher aus der Schlaufe herausgenommen werden. (Siehe Abb. 10.8). Das Programm wird durch Drücken auf den Pfeil gestartet[1]. Nach Ablauf des Programms werden die Resultate jedes Schlaufendurchgangs im Array angezeigt.

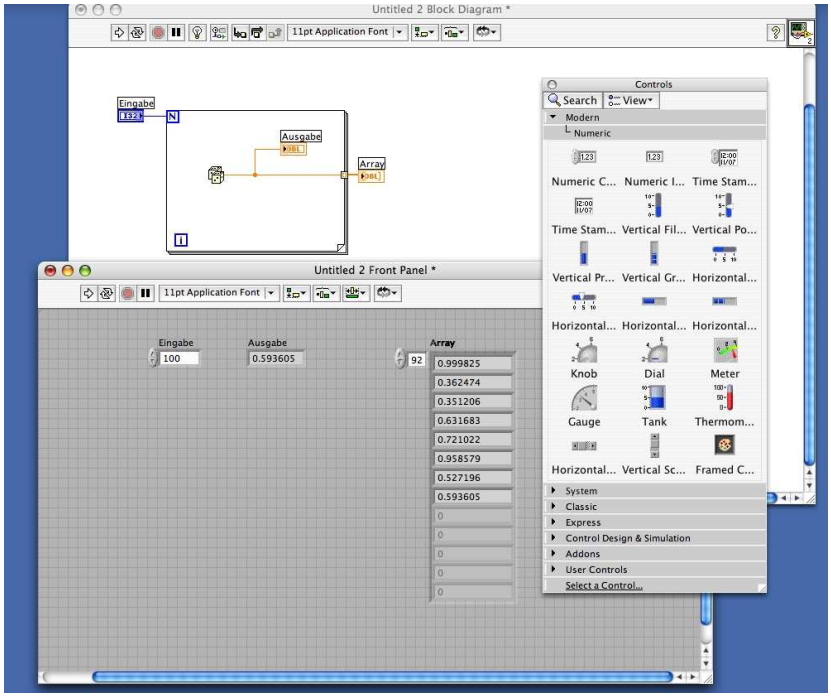


Abbildung 10.8: Front Panel und Block Diagram eines Programms, das kontinuierlich Zufallszahlen generiert.

Graphikausgabe

Um das Ergebnis in einer Graphik auszugben, müssen wir im Front Panel einen *Waveform Graph* einfügen (Controls, Modern, Graph, Waveform Graph) und zwar ausserhalb der Schlaufe, da wir alle Zufallszahlen aufzeichnen wollen. Anschliessend muss der *Waveform Graph* noch mit der Ausgabe der Schlaufe verbunden werden. Siehe Abb. 10.9. Das Array brauchen wir jetzt nicht mehr und können es löschen.

Es gibt noch eine zweite Art von Graphikausgabe, die *Waveform Chart*. Beim *Waveform Graph* wird ein ganzes Array auf einmal angezeigt, aber bei der *Waveform Chart* werden die Daten fortlaufend aufgezeichnet.

Wir fügen auf dem Front Panel eine *Waveform Chart* ein (Controls, Modern, Graph, Waveform Chart), positionieren sie im Block Diagram in der For-Schlaufe und verbinden sie mit dem Zufallsgenerator. Zusätzlich verschieben wir die Zeitverzögerung wieder in die Schlaufe, damit wir den Ablauf besser beobachten können. Siehe Abb. 10.10.

[1]Falls der Pfeil unterbrochen ist, bedeutet dies, dass das Programm nicht lauffähig ist. Es könnte sein, dass ein Draht nicht richtig verdrahtet ist und deshalb gestrichelt erscheint. Mit der Apfeltaste+B können nicht richtige Drähte entfernt werden.

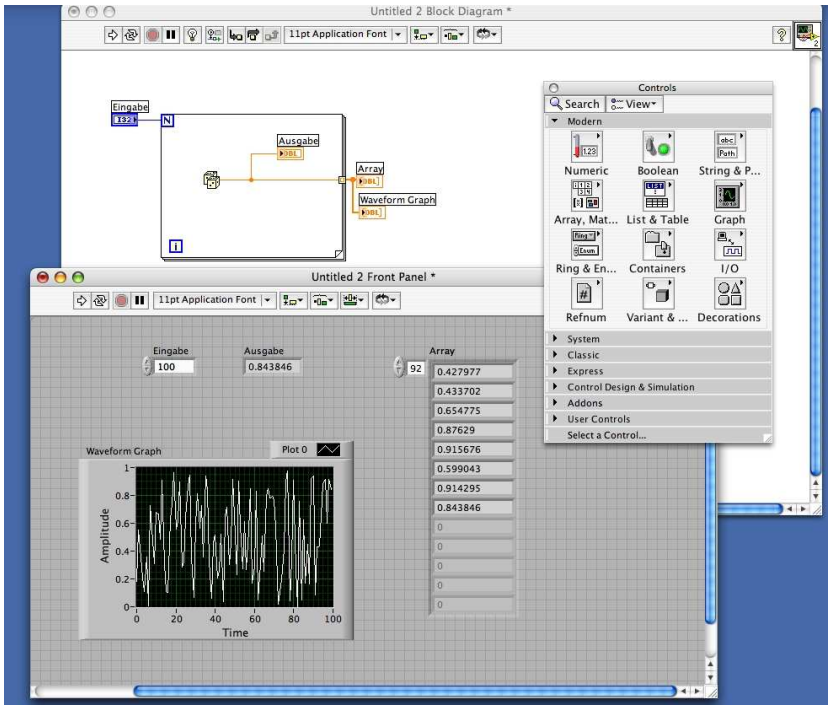


Abbildung 10.9: Front Panel und Block Diagram eines Programms, das kontinuierlich Zufallszahlen generiert und sie am Ende der *For*-Schlaufe in einer *Waveform Graph* ausgibt.

While Loop

Nun ändern wir die Art der Schlaufe von einem *For-* zu einem *While-Loop*. Das kann auf zwei Arten geschehen:

1. Im Block Diagram CTRL-Taste und Maus auf den Rand der For-Schlaufe drücken. Im Menü Replace with While Loop auswählen.

2. Im Block Diagram Functions Palette, Programming, Structures, While Loop auf Block Diagram ziehen und anschliessend die Objekte vom For in den While Loop bewegen und Drähte „reparieren“.

Zuletzt müssen wir noch die Abbruchbedingung für den While loop setzen. Dazu fügen wir einen *Schalter* auf dem Front Panel ein: Controls Palette, Modern, Boolean, Stop und verbinden ihn im Block Diagram mit der Abbruchbedingung (rechte untere Ecke). Siehe Abb. 10.11.
Im Front Panel können verschiedene Einstellungen direkt an Graphikausgaben vorgenommen werden (z.B. Darstellungsbereich der Achsen): CTRL-Taste und mit Maus auf die Graphik drücken.

10.6.5 Berechnung von Mittelwert und Standardabweichung

Will man nun den Mittelwert und die Standardabweichung der generierten Zufallszahlen berechnen, so wählt man in der Functions Palette unter Mathematics, Probability and Statistics das bereits programmierte VI Standard Deviation and Variance.vi. Wir wollen den Mittelwert und die Standardabweichung für das ganze Set an generierten Zufallszahlen berechnen, also

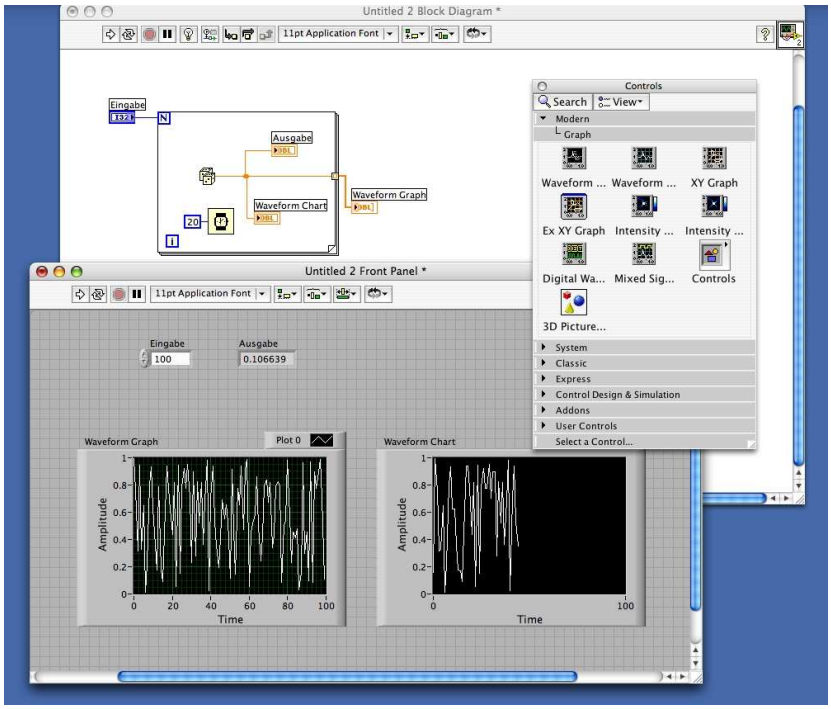


Abbildung 10.10: Front Panel und Block Diagram eines Programms, das kontinuierlich Zufallszahlen generiert, sie in einer *Waveform Chart* anzeigt und sie am Ende der *For*-Schlaufe in einer *Waveform Graph* ausgibt.

legen wir das VI neben der *While* Schlaufe ab. Wird nun das Icon mit der Schlaufe verbunden, kann es sein, dass die Verbindung unterbrochen erscheint. In diesem Falle liegt das Problem darin, dass es nicht klar ist, ob jeweils die Zahl des letzten Durchgangs oder das ganze Zahlenpaket in Form eines *ID-Arrays* übergeben werden muss. Dies ändert man mit dem Befehl enable indexing (CTRL-Taste + Mausklick auf das Übergangsstück am Rande der *While* Schlaufe). Damit wird nun die ganze Zahlenreihe in ein *Array* umgewandelt. Äusserlich erkennt man dies an der dicker gewordenen Verbindung. Das *Standard Deviation and Variance.vi* gibt nun nach Abbruch der While-Schlaufe links den Mittelwert und die Standardabweichung aus. Diese müssen an zwei Ausgaben (Indicators) *Mittelwert* und *Standardabweichung*, die im Front Panel eingefügt werden, weitergeleitet werden. In Abb.10.12 ist die *Waveform Graph* entfernt worden.
Zu beachten ist dabei, dass ein dynamischer Aufbau eines Arrays mit der illustrierten Methode gefährlich ist. Ein While-Loop kann endlos laufen und dabei ein riesiges Array erzeugen. *Autoindexing* ist deshalb vorzugsweise mit *For-Loops* zu gebrauchen.

10.6.6 Histogramm

Um ein Histogramm der Zufallszahlen zu bilden, wählt man in der Functions Palette unter Mathematics, Probability and Statistics das bereits programmierte VI Histogram.vi. Als Eingabe braucht das Histogram.vi den Array der Zufallszahlen. Das Histogramm wird in einer Grafik im Front Panel ausgegeben (Controls Palette, Modern, Graph, Waveform Graph. Das Block Diagram ist in Abb. 10.13 dargestellt.
Um die Anzahl Klassen vorzugeben, brauchen wir ein eine Eingabe (numerical control), welche

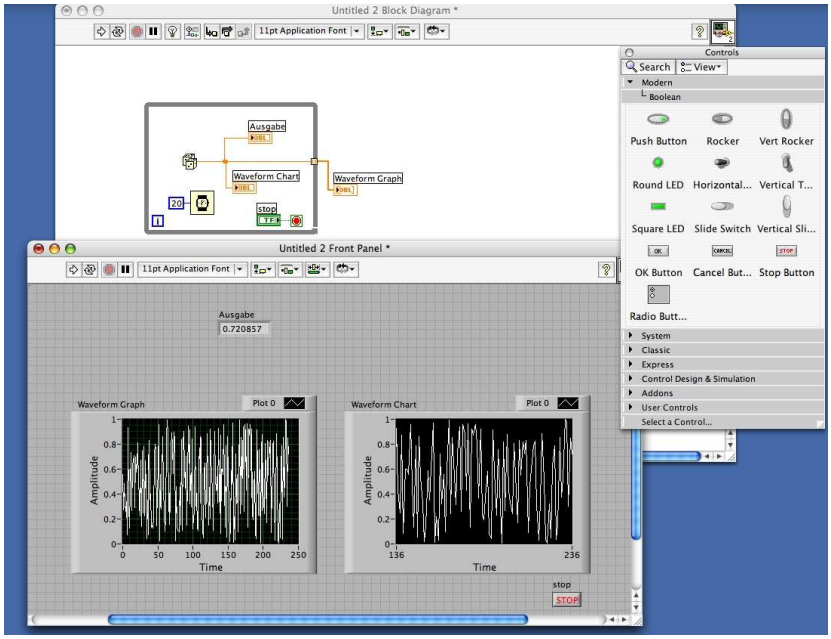


Abbildung 10.11: Programm das kontinuierlich Zufallszahlen generiert mit *While-Loop* und graphischer Ausgabe.

wir im Front Panel einfügen und mit dem VI histogram.vi verbinden. Weiter können wir jetzt die Zeitverzögerung wieder entfernen. Siehe Abb. 10.14.

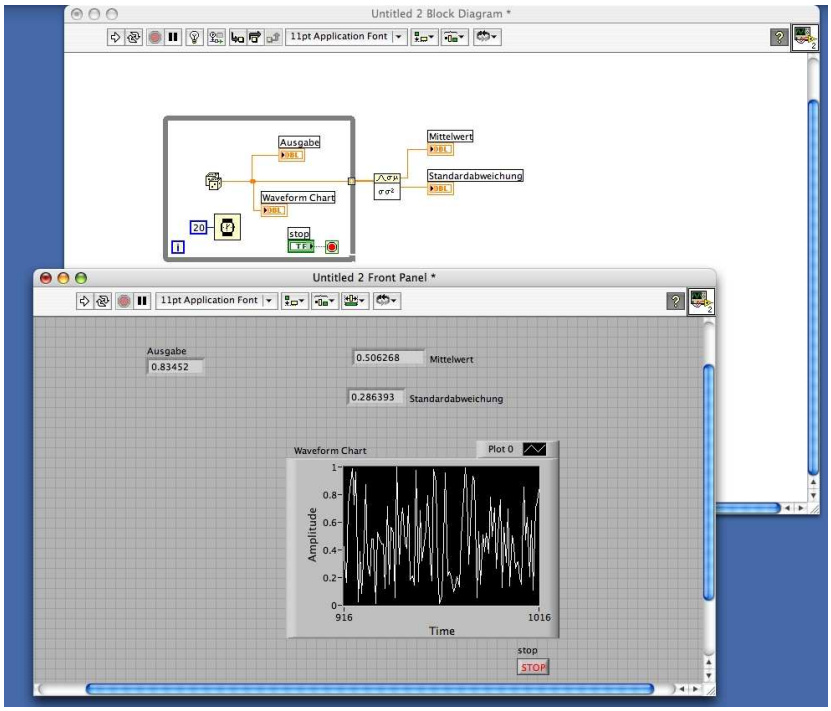


Abbildung 10.12: Front Panel und Block Diagram des Programms, das Zufallszahlen generiert und deren Mittelwert und Standardabweichung berechnet.

10.7 Hilfefunktionen und Debugging

Im Menu Help sind einige Hilfefunktionen enthalten. Unter Search the LabVIEW Help... sind Erläuterungen zu verschiedenen Themen zu finden. Verwendet man vorprogrammierte VI's, so erscheint ein Hilfefenster, wenn man darüber fährt (z.B. Eingabe- und Ausgabeformate und -verbindungen). Zuvor muss allerdings noch im Help Menü Show Context Help angewählt werden. Mit CTRL-Taste und Mausklick kann man eine Beschreibung des ausgewählten Objektes direkt abrufen.
Eine sehr interessante Funktion, die LabView anbietet, ist die Debugging-Funktion. Wählt man im Block Diagram das Symbol mit der Glühbirne an (*Highlight Execution*), so läuft das Programm in Zeitlupe ab und die jeweiligen Datenübertragungen können grafisch verfolgt werden. Damit wird der Programmablauf nachvollziehbar, und eventuelle Programmierfehler können damit besser entdeckt und beseitigt werden.
Ist der Start-Pfeil im Block Diagram unterbrochen, kann durch klicken auf den Pfeil eine Liste der Fehlerquellen angezeigt werden.

10.8 Datenerfassung mit LabVIEW

Damit mit LabVIEW externe Messdaten erfasst werden können, braucht es eine sogenannte DAQ-Karte (DAQ steht für *Data Acquisition*), die beispielsweise in einem freien Steckplatz im Computer eingebaut wird. Es gibt viele Möglichkeiten, wie LabVIEW (Software) mit Messdatenerfasungs-Hardware „kommunizieren"kann. In unseren PowerMac G5 Rech-

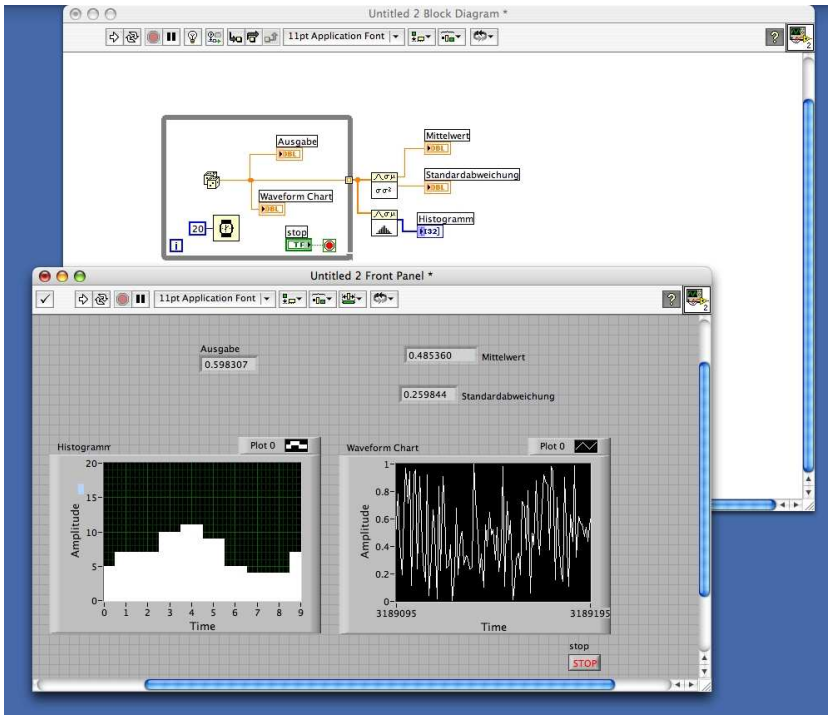


Abbildung 10.13: Front Panel und Block Diagram des Programms, das Zufallszahlen generiert, deren Mittelwert und Standardabweichung berechnet und die Verteilung in einem Histogramm darstellt werden.

nern sind PCI Express DAQ-Karten von *National Instruments* eingebaut. Es handelt sich dabei um professionelle Multifunktionskarten des Typs NI-PCIe-6251 (16bit, 1.25 Megasamples/s). Die Karten werden auf den Macs mit dem sogenannten *DAQmx Base 2.1* Treiber angesteuert. Dieser Treiber ist insofern einzigartig, dass der Treiber selbst fast vollständig in LabVIEW G programmiert ist, also vom Benutzer auch geändert werden kann. Die Funktionen von *DAQmx Base* entsprechen denjenigen des vollen Treibers, der allerdings in Form eines umfangreichen externen Softwaremodel realisiert ist und deshalb auch vom benutzten Betriebssystem unabhängig ist.
Wir gehen in diesem Kapitel auf einige Grundstrategien von Analogmessungen ein.

10.8.1 Immediate Nonbuffered Acquisition

Die einfachste Art der Datenerfassung ist die sogenannte *Immediate Nonbuffered Acquisition*. Dabei wird der Wert, der momentan gerade von der Karte registriert wird, gelesen. Werden mehrere Datenpunkte kontinuierlich gelesen, so wird dies software-mässig (d.h. vom LabVIEW-Programm) gesteuert. Wir benutzen dazu einen While Loop. Die Abtastrate und deren Präzision ist dann von der Kapazität des Rechners abhängig und kann entsprechend variieren (z.B beim Bewegen der Maus). Zur Datenerfassung wird die oben erwähnte Programmgruppe *DAQmx Base* verwendet (Functions Palette, Measurement I/O, DAQmx Base).

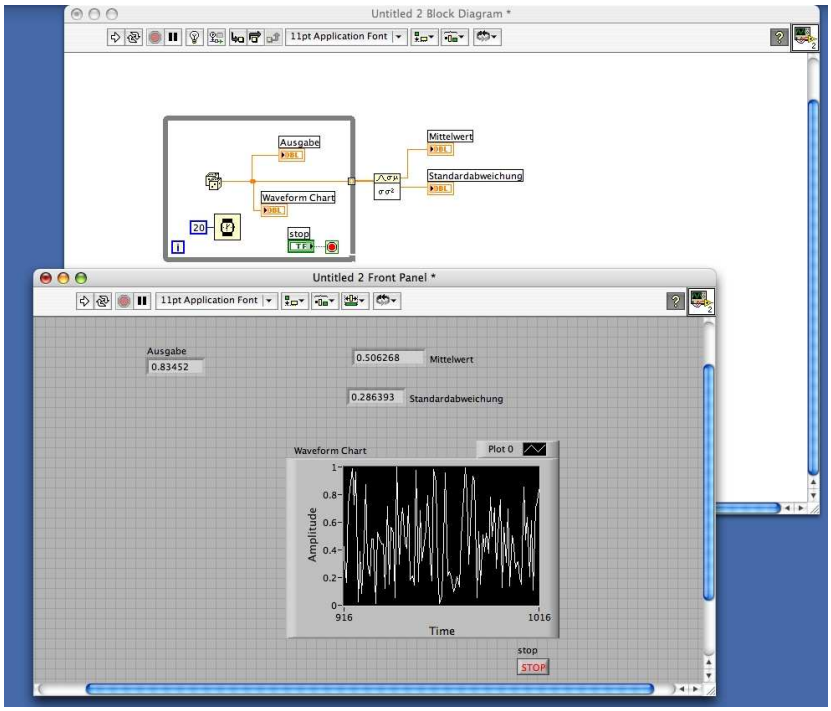


Abbildung 10.14: Front Panel und Block Diagram des Programms, das Zufallszahlen generiert und deren Mittelwert und Standardabweichung berechnet und die Verteilung in einem Histogramm darstellt. Weiter kann die Anzahl Klassen vorgegeben werden.

Kleines Programm zur *Immediate Nonbuffered Acquisition*

Öffnet ein neues VI und positioniert eine While-Schlaufe mit Stoppschalter. Anschliessend positionieren wir folgende VI aus DAQmx Base:

Create Task.vi Im Untermenü DAQmx Base Advanced Task Options. Startet einen Programmablauf (*Task*). Dieses VI muss immer am Anfang eines Task stehen.

Create Virtual Channel Definiert den Einlesekanal *Channel*:
Für alle Programme: *Dev1/ai0*. Muss als *Control* eingefügt werden (Controls, Modern, I/O, DAQmx Name Controls, Physical Control).

Start Task Startet die Messung

Read Liest die Daten ein und gibt sie weiter.

Stop Task Stoppt die Messung.

Clear Task Löscht den Task aus dem Arbeitsspeicher und beendet das Programm.

Es empfiehlt sich nach beenden des Tasks auch noch eine Funktion zur Anzeige eines möglichen Fehlers einzusetzen. Dazu wird das General Error Handler.vi aus der Functions Palette, Programming, Dialog & User Interface am Ende der Kette eingefügt und verdrahtet.
Wie in Abb. 10.15 zu sehen, muss das Read.vi in der Schlaufe positioniert werden. Weiter

geben wir die Daten in einer *Waveform Chart* und den momentanen aktuellen Wert in einer Anzeige aus. Diesen Wert erhalten wir durch Indizieren des ID-Array der Funktion, das prinzipiell auch mehrere Datenpunkte beinhalten kann. Dazu brauchen wir die Funktion Index Array (unter Array, Index Array zu finden). Alle VI müssen noch untereinander verbunden werden (Task/Channels in, Task Out; error in, error out).

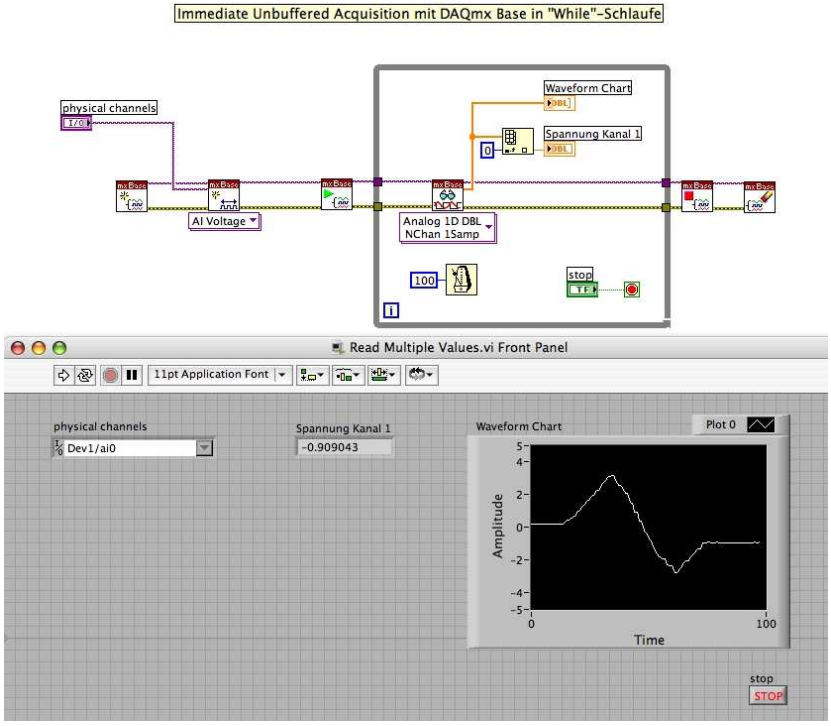


Abbildung 10.15: Front Panel und Block Diagram des Programms Immediate Nonbuffered Acquisition

10.8.2 Timed Buffered Acquisition

Bei der Timed Buffered Acquisition werden die Daten von der Karte in den Computerspeicher geschrieben. Erst wenn der dazu vorgegebene Speicherplatz voll ist, stehen die Messwerte dem Programm zur Verfügung. In Abb. 10.16 ist ein Beispiel für ein einmaliges Lesen einer bestimmten Anzahl abgetasteten Messdaten gezeigt. In diesem Beispiel (siehe Front Panel) werden 1000 Messdaten mit einer Abtastrate von 200 Hertz aufgenommen, die Messung dauert folglich 20 Sekunden.

10.8.3 Timed Buffered Continuous Acquisition

Will man nun eine kontinuierliche, getaktete und gepufferte Messdatenerfassung, muss ein sogenannter Zirkularpuffer eingeführt werden. Die Messdaten werden kontinuierlich mit einer bestimmten Abtastrate von der Karte gelesen und in einem Zwischenspeicher, dem „Puffer“ abgelegt. Periodisch wird dieser „Puffer“ gelesen und somit wieder abgebaut. Der „Puffer“ wirkt somit wie ein Reservoir für die Messdaten, bis sie herausgelesen und verarbeitet werden können. Ein Beispiel ist in Abb. 10.17 dargestellt.

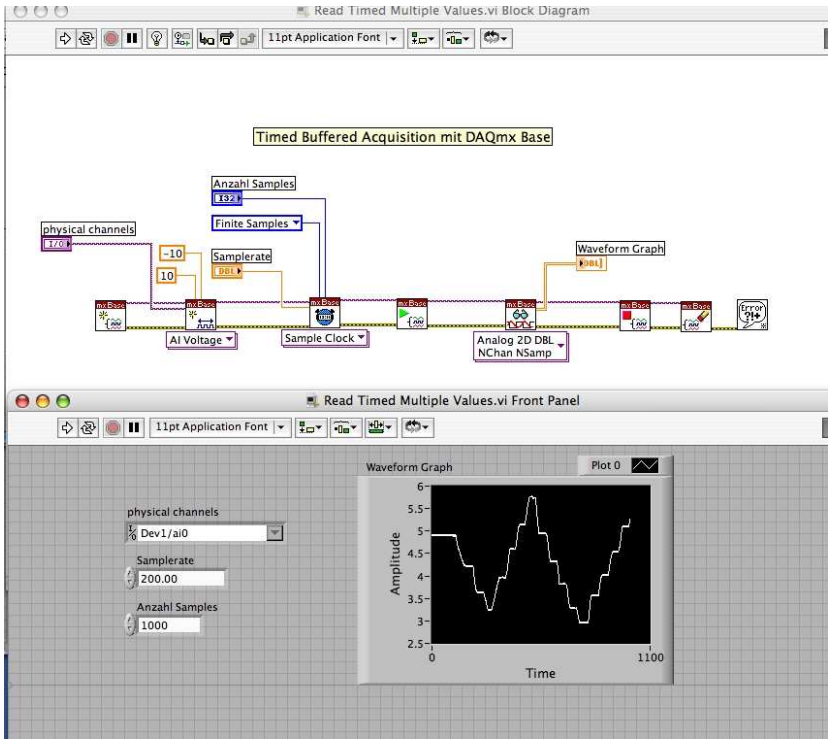


Abbildung 10.16: Front Panel und Block Diagram für Timed BufferedAcquisition.

10.9 Aufgabe: Pulsmessung über Lichtabsorption

10.9.1 Idee und Aufgabe

In dieser Aufgabe geht es darum, eine Anwendung selber zu programmieren. Dabei soll mit Hilfe einer kleineren experimentellen Anlage der eigene Pulsschlag gemessen werden. Dazu wird ein Phototransistor und eine gewöhnliche Lampe verwendet. Mit der Lampe wird die Fingerspitze durchleuchtet. Je nach Blutstrom durchdringt mehr oder weniger Licht den Finger. Der Phototransistor dient schliesslich als Detektor.
Um die Hardware brauchen wir uns nicht zu kümmern, sie steht schon bereit. Einzig die Software soll mittels LabVIEW programmiert werden.

Aufgabe

Ziel der Aufgabe ist es, das verstärkte Signal des Phototransistors mit einer vernünftigen Abtastrate abzutasten (scans/sec) und den gemessenen Blutstrom graphisch darzustellen. Dazu wählt man für die Zeit die x-Achse und für das Signal die y-Achse. Es ist zu beachten, dass die Messung auf die Bewegung des Fingers sehr empfindlich reagiert. Wenn das Blut irgendwie abgeblockt wird, kann gegebenfalls kein Blutstrom gemessen werden.

Vorbereitungen

Um die Messung zu ermöglichen, muss die Hardware sauber angeschlossen und verkabelt sein.

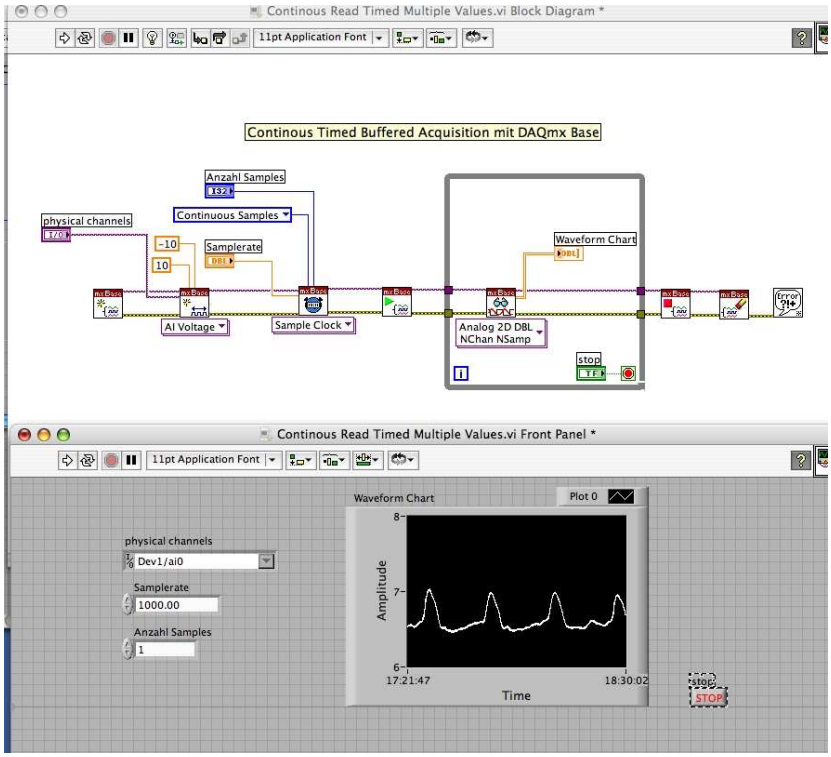


Abbildung 10.17: Front Panel und Block Diagram für Timed BufferedAcquisition.

Der Versuchsaufbau besteht aus folgenden Komponenten:

- Apple Macintosh G5
- Detektorgerät mit integrierter Lampe, Höhenanpassungsverstellung und Phototransistor
- Vorverstärker, der es erlaubt, das schwache Signal zu verstärken und einen einstellbaren Offset zu überlagern.

Siehe Abbildung 10.18
Im Mac eingebaut ist eine DAQ Karte. DAQ steht für *Data Acquisition* und bedeutet nichts anderes als die Erfassung von Messdaten.
Das Gerät wird von LabVIEW aus mit folgender Adresse angesteuert: *Dev1/ai0*.

10.9.2 Anleitung zur Programmierung

Front Panel

Als erstes muss ein neues VI geöffnet werden. Die Messung soll kontinuierlich ablaufen. Also brauchen wir zur Beendigung des Programmablaufs einen Stop-Knopf. Diesen finden wir in der Controls Palette unter Modern, Boolean. Dort gibt es mehrere zur Auswahl. Wir können ihn beliebig platzieren und wenn nötig vergrössern.
Nun sollte das VI gespeichert werden. Wir speichern es unter *puls.vi* in den Ordner *LabVIEW Prakt*. Es ist nicht erlaubt, LabVIEW-eigene VI zu ändern (zB. Defaultwerte von

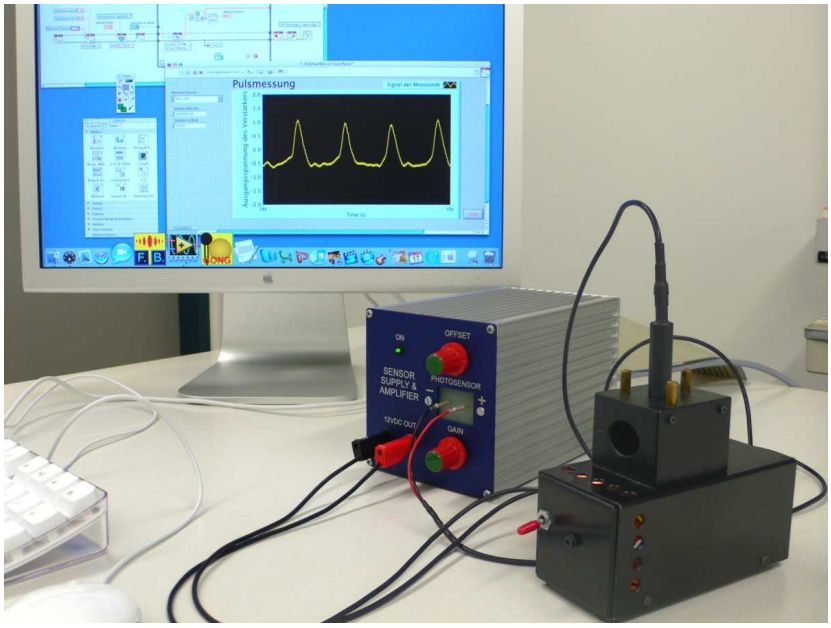


Abbildung 10.18: Versuchsaufbau Pulsmessung: Datenerfassungs PC, Detektorkasten und Vorverstärker

LV-Unterprogrammen) und danach zu speichern. Falls ein LabVIEW-eigenes VI abgeändert gebraucht werden soll, muss es unter einem neuen Namen im Ordner LabVIEW Prakt gespreichert werden.
Generell sollte regelmässig gespeichert werden.
Nun fehlt noch die graphische Ausgabe auf dem Front Panel. Dazu verwenden wir eine *Waveform Chart* (Controls, Modern, Graph, Waveform Chart).
Damit ist vorläufig das Wichtigste auf dem Front Panel plaziert. Zu bemerken ist noch, dass die Chart nach der Platzierung noch benannt werden sollte. Das noch leere Label ist deutlich zu sehen. Derselbe Namen erscheint dann auch im Block Diagram; damit wird die Identifikation dort einfacher.

Block Diagram

Nun öffnen wir das Block Diagram. Dort sollte der Stop-Knopf als True-False-Terminal und die Waveform Chart als DBL-Terminal sichtbar sein.
Im Block Diagram wird das eigentliche Programm in der LabVIEW-Syntax gezeichnet. Da wir kontinuierlich bis zum Stop messen wollen, braucht es eine *While-Schlaufe*. Diese finden wir in der Functions Palette, Structures, While Loop.
Das i in der While-Schlaufe ist für unsere Zwecke nicht wichtig, es zählt die Anzahl ausgeführter Schlaufen. Wichtiger ist der runde Pfeil am rechten unteren Rand. Er dient zur Eingabe der Abbruchbedingung. Wenn er auf *True* gesetzt wird, bricht die Schlaufe beim nächsten vollendeten Durchgang ab. Standardmässig ist er auf *False*. Da wir kontinuierlich messen wollen, muss sowohl die *Chart* als auch der *Stop*-Knopf innerhalb der While-Schlaufe platziert werden.
Unser VI sieht jetzt aus wie auf Abbildung 10.19. Zum Vergrössern und Platzieren von Komponenten muss in der Tool Palette der Pfeil angeklickt werden.

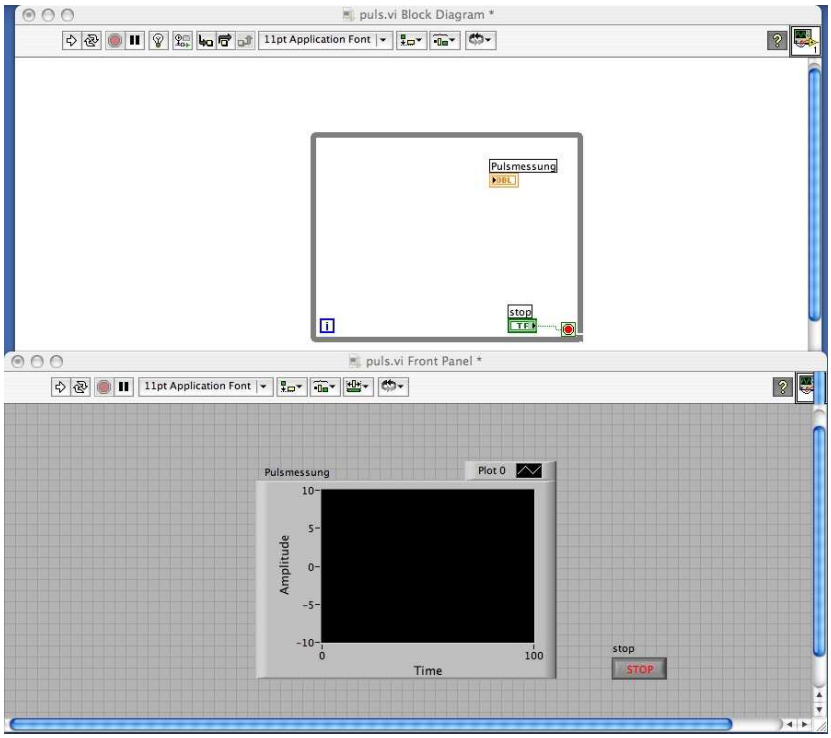


Abbildung 10.19: Front Panel und Block Diagram für puls.vi

Kommunikation mit der Messdatenerfassungskarte

Die ganze Kommunikation mit der DAQ-Karte wird im Block Diagram programmiert. Bevor man überhaupt etwas messen kann, muss die Karte konfiguriert werden. Weil wir eine Messdatenerfassungskarte ansteuern, brauchen wir die VI in Functions, Measurements I/O, DAQmx Base - Data Acquisition. Mit der Hilfefunktion lässt sich anhand des Icons, das natürlich ausserhalb der while-Schlaufe plaziert werden muss, die Funktion dieses SubVIs analysieren. Ein Doppelklick auf das Icon öffnet das entsprechende SubVI. Schaut zur Verwendung der VI im Abschnitt 10.8 im Beispielprogramm nach.
Für die Messung muss ein *Task* definiert werden. Dies geschieht mit dem VI DAQmxBase Create Task.vi (unter Advanced Task Options)[2]. Anschliessend muss dem Progamm der Kanal (physical channel) mitgeteilt werden: Der Funktion Create Virtual Channel.vi muss vom Front Panel aus eine Eingabe (Controls, Modern, I/O, DAQmx Name Controls) zugeführt werden. Ferner muss der Karte mitgeteilt werden, mit welcher Abtastrate (scans/sec) eingelesen werden soll und wie viele Samples: Timing.vi. Danach wird die Messung gestartet mit Start Task.vi. Damit die Daten auch erfasst und allenfalls gespeichert werden, müssen die Signale in der While-Schlaufe mit Read.vi erfasst werden. Nach beenden der Schlaufe muss die Datenerfassung gestoppt (Stop Task.vi) und anschliessend beendet werden(Clear Task.vi). Zum Anzeigen von möglichen Fehlern kann am Ende der Kette ein General Error Handler.vi (Unter Functions, Programming, Dialog & User Interface) eingefügt werden. Unser VI sollte nun etwa wie in Abb. 10.20 aussehen.

[2]Im folgenden wird DAQmx Base jeweils weggelassen bei VI Namen, welche unter *DAQmx Base* zu finden sind.

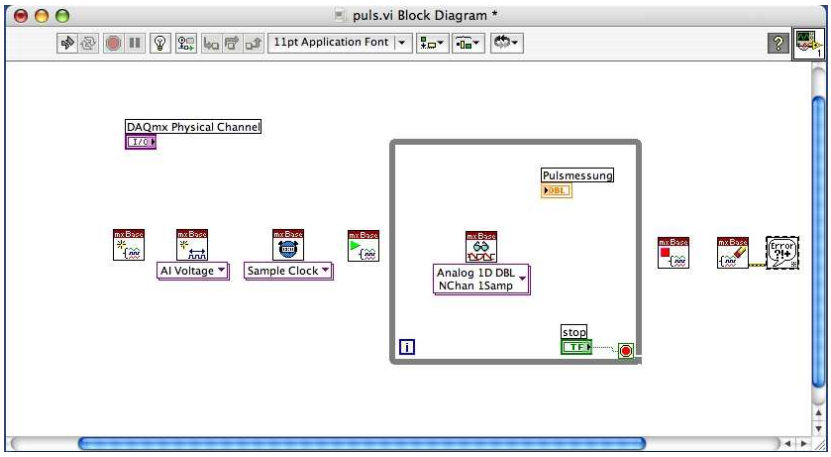


Abbildung 10.20: Block Diagram für puls.vi mit allen VI

Natürlich muss nun noch alles verdrahtet und alle Einstellungen richtig gemacht werden. Man erhält eine Kurzbeschreibung eines VIs, wenn man mit der Maus auf das entsprechende Icon fährt und dort bei eingeschalteter Context Help (im Help Menü) kurz verweilt.
Es bleibt dem Programmierer überlassen, ob er Einstellungen wie *Samplerate*, *Anzahl Samples*.. vom Front Panel via Numerical Control verändern will, oder ob alles fix als Numeric Constant im Block Diagram festgehalten wird.
Nochmals zur Erinnerung:
Es sollen die Sub VIs mit den entsprechenden gewünschten Werten angesteuert werden. Die Ansteuerung erfolgt von puls.vi aus. Niemals sollen die SubVIs geöffnet, ihre Defaultwerte bewusst geändert und schliesslich wieder gespeichert werden.
Nachfolgende Benützer werden dafür dankbar sein.
Die Darstellung soll sinnvoll sein, das bedeutet, die Achsenanschriften müssen entsprechend gewählt werden. Die Skalenendwerte zu fixieren ist meist besser als durch LabVIEW eine automatische Skalierung vorzunehmen. [3]
Nun ist das Progamm lauffähig. Sollte es aber trotzdem nicht laufen, so ist das Problem nicht immer klar, da mehrere SubVIs integriert wurden. Diese können Fehler verursachen, welche nicht augenscheinlich sein müssen, oder durch falsche Eingabeparameter verursacht werden. Zum einfacheren Fehlerfinden sollte deshalb eine Fehlerbehandlung integriert werden. Jedes SubVI hat eine *error in* und *error out* Variable. So kann ein allfälliger Fehler im Programmablauf weitergegeben werden, um ihn am Schluss zu analysieren. Natürlich müssen wir von *Create Task.vi* aus startend den Error-Cluster via alle SubVIs weitergeben, also auch durch die While-Schlaufe. Wenn wir den Stop-Knopf drücken, wird im Falle eines Fehlers mit dem Error Handler.vi eine Meldung erscheinen. Natürlich ist es auch möglich, im Falle eines Fehlers die While-Schlaufe abbrechen zu lassen. Der Error-String enthält eine Boolean-Variable, die dann auf *False* gesetzt würde. Dazu muss allerdings der String mit einer Unbundle-Funktion auseinandergenommen werden. Dies gehört jedoch nicht zur Aufgabe und ist eine freiwillige Übung.

[3] Mit CTRL-Tast und Maus auf Graphik, Graphikfenster öffnet sich, X oder Y scale

Erweiterung der Pulsmessung

Anstatt die Daten direkt mit einer *Waveform Chart* auszugeben, können die Daten zuerst auch gesammelt werden und nur der Mittelwert ausgegeben werden. Dazu werden die Messpunkte in einem Array gesammelt, dann der Mittelwert gebildet und dieser anschliessend an die Graphik ausgegeben. Dazu muss vom 2D-Array von DAQmx Base Read.vi zuerst ein 1D-Array der Messdaten eines Kanals abgespalten werden. (*Index Array* mit Index 0 = 0 (Functions, Programming, Array)).

Wer die Aufgabe zufriedenstellend gelöst hat, soll sein VI speichern. Das VI soll ausgedruckt und dem Assistenten abgegeben werden.

Falls Probleme auftauchen

Es kann geschehen, dass man grosse Schwierigkeiten hat, eine Lösung der freien Parameter zu finden, so dass eine stabile Messung möglich ist. In diesem Fall soll der Assistent weiterhelfen.

Kapitel 11

Fraunhoferbeugung

Zusammenfassung

In diesem Praktikum kommt für gewisse Versuche ein modernes, computerunterstütztes Labor-Datenaquisitionsprogramm (LABVIEW) zum Einsatz. Die Verwendung eines Computers ist heute in Labors selbstverständlich. Deshalb soll er auch im Praktikum gebraucht werden. Vom physikalischen Gehalt her ist die Fraunhoferbeugung ein Paradebeispiel für Beugungsphänomene, und die Verwendung der Fouriertransformierten. Für diesen Versuch werden verschiedene Voraussetzungen gemacht. So muss die Fouriertransformation bekannt sein, verschiedentlich wird an die Quantenmechanik erinnert. Wir verwenden LABVIEW, welches aus einem vorhergesehenden Praktikumsversuch bekannt ist. Damit von diesem Praktikum wirklich profitiert werden kann, sollte es erst gegen Ende des Semesters durchgeführt werden.

Ziel des Versuches

Das Ziel dieses Versuches ist dreifach:

- Physikalisch soll ein verbessertes Verständnis von Beugungsphänomenen erzielt werden.
- Mathematisch sollen Aspekte der Fouriertransformation klarer werden.
- Für die Datenaquisition soll LABVIEW verwendet werden. Damit kommt der Computer in einem Versuch des Anfängerpraktikums zum Einsatz.

11.1 Einleitung

11.1.1 Wellenoptik

Viele physikalische Prozesse können mit Hilfe von Wellenbewegungen dargestellt werden. Während wir uns in den vorherigen Praktika ein Bild von der Welleneigenschaft z.B. der Schwingungen einer Saite oder eines Pendels gemacht haben, so wurde der Wellencharakter des Lichtes (sichtbares Licht: λ = 400 nm - 800 nm) vorerst nur angedeutet. Viele optische Phänomene wie z.B. die Reflexion oder Brechung von Licht (s. Linsen- und Prismenspektrometerversuch) können weitgehend mit der geometrischen Optik (bzw. Strahlenoptik) erklärt werden. Trifft das Licht jedoch auf Hindernisse, wie z.B. eine unendlich grosse Wand mit einer winzigen Öffnung, dann müssen wir uns der Wellenoptik (Wellentheorie der elektromagnetischen Natur des Lichtes) bedienen um die Erscheinungen hinter der Wand vollständig erklären zu können.
Die Wellenoptik bildet die Grundlage für die Beschreibung der Lichtausbreitung, wenn die Ausdehnung der Wellenfront in der gleichen Größenordnung ist wie die Wellenlänge des Lichts. Ist dagegen die Ausdehnung der Wellenfront wesentlich größer als die Wellenlänge, dann kann die Lichtausbreitung in vielen Fällen auch im Rahmen der **geometrischen Optik** beschrieben werden.
Im Rahmen der Wellenoptik wird die Lichtausbreitung, bekannt auch als **Huygens-Fresnel Prinzip**, folgendermaßen beschrieben:

> Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Die gesamte Wellenfront zu einem beliebigen Zeitpunkt ergibt sich als Einhüllende der Überlagerung aller Elementarwellen, die von einer gegebenen Wellenfront ausgehen.

Damit lassen sich neben der Reflexion und der Brechung, auch die Interferenz und Beugung erklären.

11.1.2 Überlegungen zur Grenze der geometrischen Optik

Um die Grenzen der geometrischen Optik auszuloten betrachten wir eine ebene Welle im Raum. Sie habe eine mittlere Frequenz ω_0. Das Feld dieser Welle hat in einem beliebigen Punkt die Gestalt $f(t) = A(t)e^{i\omega_0 t}$, wobei *A(t)* die Amplitude der Welle in Abhängigkeit von der Zeit sei. Analog lässt sich die Welle auch als Funktion des Ortes schreiben. $f(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{i\vec{k_0}\vec{r}}$, wo k_0 ein Mittelwert für den Wellenvektor sei und $\vec{r} = (x, y, z)$ der Ortsvektor.
Da die Welle eine periodische Funktion ist, kann man sie als eine Reihe von monochromatischen Komponenten entwickeln [1]. Die Amplitude der Frequenz ω ist proportional zum Integral

$$a(\omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} A(t)e^{i(\omega-\omega_0)t}dt \tag{11.1}$$

Für die örtlichen Komponenten gilt die analoge Überlegung:

[1] Man kann von jeder zeitabhängigen Funktion die Fouriertransformierte bilden, Periodizität ist nicht notwendig.

$$a(\vec{k}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0)\vec{r}} d^3r \tag{11.2}$$

Der Faktor $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ ist eine periodische Funktion mit verschwindendem Mittelwert. Wäre A immer konstant, so hätte das Integral für alle $\omega \neq \omega_0$ den Wert Null. Ist A zeitabhängig, ändert sich jedoch über einem Zeitintervall $1/(\omega - \omega_0)$ nur wenig, so ist das Integral näherungsweise Null. Damit sich das Integral merklich von Null unterscheidet, muss sich A in einem Zeitintervall der Grösse $1/(\omega - \omega_0)$ beträchtlich ändern. Für die örtliche Komponente gelten analoge Überlegungen. Nun sei Δt ein Zeitintervall in dem sich die Amplitude der Welle an einem Punkt merklich ändert. Dann folgt aus unseren Überlegungen, dass genau diejenigen Frequenzen einen bedeutenden Beitrag zum Integral liefern, die in einem Intervall um ω_0 liegen, für das gilt $\Delta t \approx 1/(\omega - \omega_0)$. Sei $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$, dann haben wir

$$\Delta\omega\Delta t \approx 1 \tag{11.3}$$

Die Welle wird also „monochromatischer"(s. Kapitel 11.2), je grösser Δt ist. Diese Aussage findet sich in der **Heisenbergschen Unschärferelation** wieder:

> Je schärfer ein Wellenpaket in der Zeit definiert ist, umso breiter (bzw. unschärfer) wird seine Frequenzverteilung.

Analog definieren wir ein Intervall $\Delta\vec{k}$der Werte, die in der Entwicklung des Fourierintegrals einen merklichen Beitrag liefern:

$$\Delta k_x \Delta x \approx 1; \Delta k_y \Delta y \approx 1; \Delta k_z \Delta z \approx 1 \tag{11.4}$$

Dies können wir veranschaulichen, indem wir in die Bewegungsrichtung der Welle eine Blende einbringen. Die Amplitude hinter der Blende ist nicht mehr überall konstant. Somit kann die Welle nicht mehr überall denselben Wellenvektor haben. Laut der geometrischen Optik ergibt sich hinter der Blende ein identisches Abbild der Welle. Physikalisch gesehen jedoch, fliegen die Photonen nach dem Durchgang durch das Loch nicht mehr streng parallel, sondern werden abgelenkt. Die Blende schränkt den Ort der Photonen ein. Die Blendebreite D ist hier die Ortsunschärfe Δx; daraus resultiert eine Impulsunschärfe Δk_x. Die Ausbreitungsrichtung ist also unscharf um einen Winkel

$$\theta = \frac{\Delta k_x}{k_x} \approx \frac{1}{k_x \Delta x} \approx \frac{\lambda}{D} \qquad \text{(siehe Fig.11.1).} \tag{11.5}$$

Damit ist offensichtlich, dass die geometrische Optik an den Randgebieten einer Blende keine gute Näherung darstellt. Für die geometrische Optik muss stets die Vorraussetzung erfüllt sein, dass die Blendengrösse erheblich grösser ist als die Wellenlänge des beleuchtenden Lichtes: D $\gg \lambda$, sonst wird θ gross.

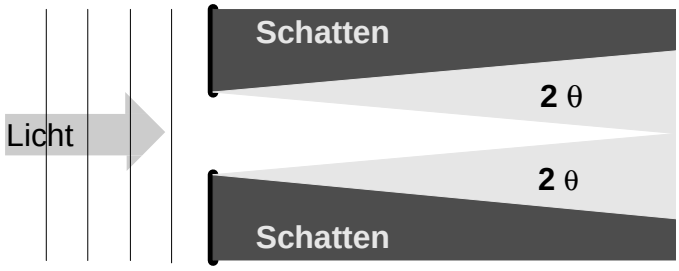


Abbildung 11.1: Licht und Schatten hinter einer Spaltblende.

11.2 Interferenz

Interferenz ist das Phänomen, das beobachtet wird, wenn Wellen sich überlagern (Superposition). Damit zwei oder mehr Wellen miteinander interferieren, müssen sie jedoch kohärent sein, d.h. sie haben das gleiche Frequenzspektrum und konstante Phasendifferenz. Bei zwei rein monochromatischen Wellen bedeutet das, dass sie die gleiche Frequenz (=Farbe)[2] und Polarisation haben müssen. Dies ist jedoch nur eine hinreichende Bedingung für Kohärenz, da monochromes Licht nur eine Idealisierung der Wirklichkeit darstellt und z.B. im Labor nur mit einem Laser hergestellt werden kann. In der Natur treffen wir jedoch auf zeitlich und räumlich begrenzte Wellenzüge, d.h. Wellenpakete, die statt einer Frequenz ein ganzes Frequenzspektrum besitzen. Damit diese Wellenzüge miteinander interferieren können, müssen sie sowohl kohärent als auch ihre Amplitude zur gleichen Zeit am gleichen Ort von Null verschieden sein. Diese Bedingung ist umso leichter zu erfüllen, je größer die Kohärenzlänge L eines Wellenzugs ist. Die Kohärenzlänge wird bestimmt durch den Emissionsvorgang in der Quelle: Je größer die Emissionszeit τ in der Quelle ist, umso größer ist die Kohärenzlänge L des emittierten Wellenzugs: $L = c\tau$. Damit zwei Wellenzüge interferieren können, muss ihr Gangunterschied Δ kleiner als ihre Kohärenzlänge L sein.
Wir betrachten nun zwei Lichtwellen:

$$\Psi_1 = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\bar{\omega}t+\delta_1)} \Psi_2 = \Psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\bar{\omega}t+\delta_2)} \tag{11.6}$$

In dem Interferenzgebiet lautet dann die Wellenfunktion der sich überlagernden Wellen Ψ_1 und Ψ_2:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \tag{11.7}$$

Die Intensität einer Welle ergibt sich zu

$$I \propto c(\Psi_1 + \Psi_2)^2 = I_1 + I_2 + I_{int} \tag{11.8}$$

mit dem Interferenzterm

$$I_{int} = 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\delta_1 - \delta_2) \tag{11.9}$$

[2]Eine Welle mit nur einer Frequenz heisst monochrom. Sie besitzt keinen definierten Anfang und kein definiertes Ende

- Vollständige konstruktive Interferenz: Interferenzterm ist maximal, wenn $\cos\delta = 1$ ist ($\delta = \delta_1 - \delta_2$), d.h. $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$
- konstruktive Interferenz: $0 < \cos\delta < 1$
- destruktive Interferenz : $0 > \cos\delta > -1$
- Vollständige destruktive Interferenz: $\cos\delta = -1$, d.h. $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$

11.3 Beugung

Unter Beugung versteht man die Wellenausbreitung hinter einem Hindernis, dessen Ausdehnung von gleicher Größenordnung oder kleiner ist als die Wellenlänge. Erreicht eine ebene Lichtwellenfront einen Spalt, so kann man diesen in n-fach viele Punkte aufteilen. Diese werden wiederum als Punktquellen von Elementarwellen betrachtet bezüglich des Fresnel-Huygens Prinzip (siehe Abbildung 11.2). Das resultierende Beugungsmuster auf einem Schirm, welcher im Abstand a hinter dem Spalt liegt, ergibt sich aus der Superposition der verschiedenen Elementarwellen. Somit stehen wir vor dem analogen Problem wie bei der Interferenz.

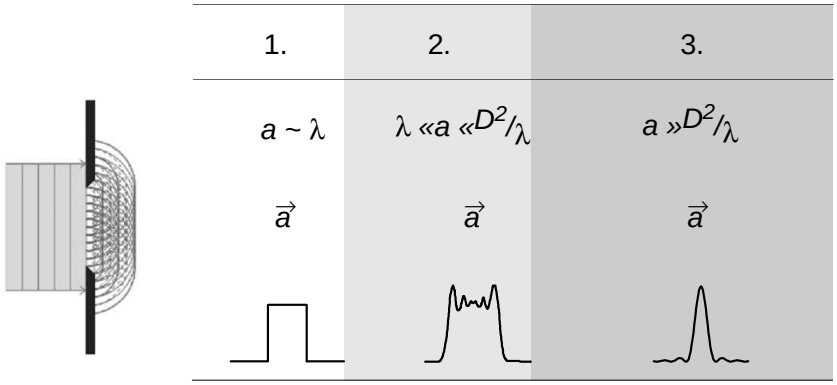


Abbildung 11.2: Auf der linken Seite werden schematisch die einzelnen Punkte im Spalt als Quellen weiterer Elementarwellen dargestellt. Auf der rechten Seite sieht man die resultierenden Beugungsmuster, je nach Abstand a des Bildschirms zum Spalt

Je nachdem wie weit der Schirm vom Spalt entfernt ist, s. Abb. 11.2, unterscheiden wir drei Gültigkeitsbereiche und daraus resultieren unterschiedliche Beugungsmuster am Schirm.

1. $a \sim \lambda, D \gg \lambda$
   In einigen wenigen Wellenlängen Abstand von der Blende ist die Näherung der geometrischen Optik noch gültig. Licht und Schatten sind bis auf Grössenordnungen der Wellenlänge scharf.

2. $\lambda \ll a \ll D^2/\lambda$
   In diesem Zwischenbereich sind Licht und Schattengrenzen unscharf. Die Ausdehnung der Unschärfe beträgt $\sqrt{\lambda a} \ll D$. Dies ist das Gebiet der sogenannten **Fresnelbeugung**, auf die wir hier nicht eingehen wollen.

3. $a \gg D^2/\lambda$
   Weit entfernt von der Blende dominieren Beugungserscheinungen. Wir beobachten ein

grosses, weiches Beugungsbild der Ausdehnung $\frac{\lambda a}{D} \gg D$. Dies ist das Gebiet der **Fraunhoferbeugung**, auf die wir im folgenden Abschnitt näher eingehen wollen.

11.3.1 Fraunhofer Beugung

Einfache Spaltblende

Der Weg des Lichts von einer Quelle y im Spalt zum Punkt P auf dem Schirm wird durch *r(y)* beschrieben. R ist wiederum der Vektor vom Mittelpunkt der Quelle zum besagten Punkt P. Somit können wir r als Reihe von R und y darstellen:

$$r = R - y\sin\theta + \frac{y^2}{R}\cos^2\theta + \ldots \tag{11.10}$$

Der Winkel θ wird in der x-y Ebene vom Spalt aus gemessen. Den dritten und die höheren Terme der Reihe kann man vernachlässigen, wenn $R \gg D$ ist (bzw. $a \gg D$).

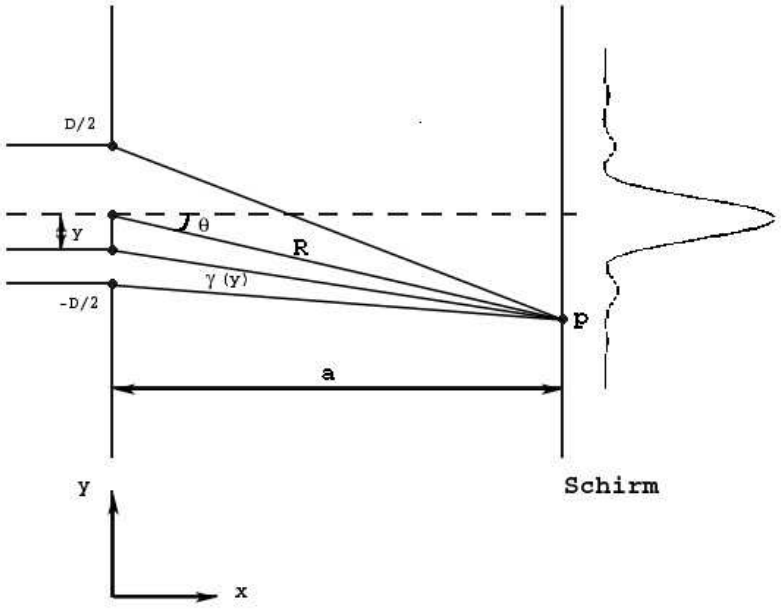


Abbildung 11.3: Skizze für einige Lichtwege hinter dem Einfachspalt

Ist die elektrische Feldstärke im Spalt $E(y) = E_0 e^{i\omega t}$ dann ist die resultierende Feldstärke am Punkt P auf dem Schirm die Summation der Felder, die von allen y's im Spalt ausgehen. Wählen wir infinitesimal kleine Abstände zwischen den einzelnen Quellen im Spalt so wird die Summation als Integration dargestellt, wobei die Spaltbreite als Integrationsgrenze gewählt wird.

$$\begin{aligned} E_P(\theta) &= \int_{-D/2}^{D/2} E_0 e^{i\omega t - ikr} dy \\ &= E_0 e^{i\omega t - ikR} \int_{-D/2}^{D/2} e^{iky\sin\theta} dy \\ &= E_0 e^{i\omega t - ikR} \cdot \frac{e^{\frac{ikD\sin\theta}{2}} - e^{-\frac{ikD\sin\theta}{2}}}{ik\sin\theta} \end{aligned} \tag{11.11}$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $e^{\pm i\delta} = \cos\delta \pm i\sin\delta$ ist

$$E_P(\theta) = E_0 e^{i\omega t - ikR} \cdot D \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)} \tag{11.12}$$

Die gemessene Intensität wird aus dem Betragsquadrat der Feldstärke berechnet und der Vorfaktor wird oft mit I_0 abgekürzt.

$$I_P(\theta) = I_0 \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}}\right]^2 \tag{11.13}$$

Die Intensität ist Null, d.h. es herrscht Dunkelheit, wenn:

$$\begin{aligned} \frac{\pi D\sin\theta}{\lambda} &= \pi, 2\pi, \ldots \\ \sin\theta &= n\frac{\lambda}{D} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3 \ldots \end{aligned} \tag{11.14}$$

Dazwischen liegen die Intensitätsmaxima bei $\sin\theta = \frac{\lambda}{D} \cdot C_n$, wobei näherungsweise $C_n \approx n + \frac{1}{2}$ mit n = 1, 2, 3, ...

Übung 1: Da der Nenner ansteigt, liegen die Intensitätsmaxima etwas tiefer als das Maximum des Sinus. Berechnen Sie die Orte der Maxima und deren Intensitätsverhältnis zum Hauptmaximum.

Doppel- und Mehrfachspaltblenden

Wenn man N gleichartige Spalten der Breite D parallel und regelmässig im gegenseitigen Abstand g (g = Gitterkonstante) anordnet, dann spricht man vom Doppelspalt ($N = 2$), Dreifach-Spalt ($N = 3$), etc., oder bei grossem N von einem Gitter.

Zur Berechnung der Intensitätsverteilung des Beugungsmusters auf einem Schirm hinter dem Mehrfachspalt müssen wir die Strahlen jedes Spalts für sich zusammengefasst denken und dann die Beiträge aller Spalten aufsummieren. Wir gehen also von der Formel 11.12 aus, bei der bereits über einen Spalt integriert wurde und erweitern sie durch die Beiträge aller weiteren Spalten.

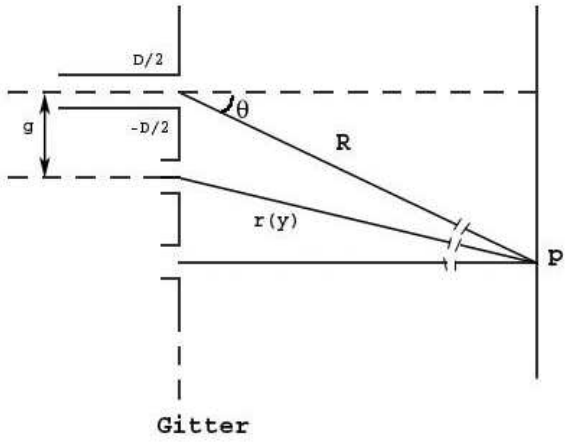


Abbildung 11.4: Geometrie eines Dreifachspaltes

$$
\begin{aligned}
E_P &= E_0 e^{i\omega t - ikR}\left(\int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{iky\sin\theta}dy + \int_{g-\frac{D}{2}}^{g+\frac{D}{2}} e^{iky\sin\theta}dy + \ldots + \int_{(N-1)g-\frac{D}{2}}^{(N-1)g+\frac{D}{2}} e^{iky\sin\theta}dy\right)\\
&= E_0 e^{i\omega t - ikR}\cdot\left[\frac{e^{\frac{ikD\sin\theta}{2}} - e^{-\frac{ikD\sin\theta}{2}}}{ik\sin\theta} + \ldots + \frac{e^{ik\left((N-1)g+\frac{D}{2}\right)\sin\theta} - e^{ik\left((N-1)g-\frac{D}{2}\right)\sin\theta}}{ik\sin\theta}\right]\\
&= E_0 e^{i\omega t - ikR}\cdot\frac{e^{\frac{ikD\sin\theta}{2}} - e^{-\frac{ikD\sin\theta}{2}}}{ik\sin\theta}(1 + \ldots + e^{ik(N-1)g\sin\theta})\\
&= E_0 e^{i\omega t - ikR} D\cdot\frac{sin\left(\frac{kD\sin\theta}{2}\right)}{\frac{kD\sin\theta}{2}}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikng\sin\theta} \qquad (11.15)
\end{aligned}
$$

Die Summe über n stellt eine geometrische Reihe dar; mit der Formel
$\sum_{m=0}^{M} q^m = \frac{1-q^{M+1}}{1-q}$ ergibt sich für die Summe
$G = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-ikng\sin\theta} = \frac{1-e^{-iNgk\sin\theta}}{1-e^{-igk\sin\theta}}$.

Bei der Berechnung der Intensität wird $|G|^2$ gebildet, d.h. G wird mit seinem konjugiert Komplexen multipliziert.

$$
|G|^2 = \frac{(1-e^{-iNgk\sin\theta})\cdot(1-e^{+iNgk\sin\theta})}{(1-e^{-igk\sin\theta})\cdot(1-e^{+igk\sin\theta})} = \frac{\left(e^{\frac{iNgk\sin\theta}{2}} - e^{-\frac{iNgk\sin\theta}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{igk\sin\theta}{2}} - e^{-\frac{igk\sin\theta}{2}}\right)^2} \qquad (11.16)
$$

Somit ergibt sich für die Intensitätsverteilung

$$
I_n(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\left(\frac{Dk\sin\theta}{2}\right)}{\frac{Dk\sin\theta}{2}}\right)^2\left(\frac{\sin\left(N\frac{gk\sin\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{gk\sin\theta}{2}\right)}\right)^2 \qquad (11.17)
$$

Für $\theta \to 0$ ist klar, dass damit

$$lim_{\theta\to 0} I_N = N^2 lim_{\theta\to 0} I_1 = N^2 I_0 \tag{11.18}$$

Die Funktion 11.17 setzt sich aus zwei Faktoren zusammen: Der Intensitätsverteilung des Spaltes und der Funktion 11.16, die wir „Gitterfunktion“ nennen. Diese Beziehung ist in Abbildung 11.4 anschaulich dargestellt, welche das Beugungsmuster eines Dreifachspaltes zeigt. Die Intensitätsverteilung der Beugung von den Mehrfachspalten wird mit dem Beugungsmuster des Einzelspaltes moduliert.

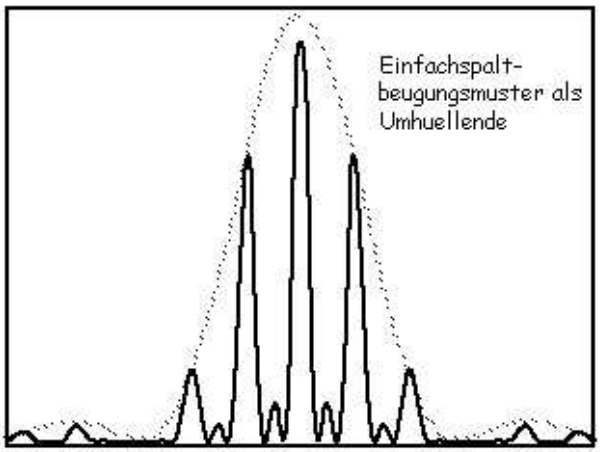


Abbildung 11.5: Beugungsmuster eines Dreifachspaltes

Dies bedeutet auch, dass unter den Winkeln θ, wo beim Einzelspalt ein Intensitätsminimum ist, auch beim Gitter ein Minimum auftritt (vlg. Gleichung 11.17). Man nennt diese Hauptminima. Zwischen ihnen liegen die Maxima des Einzelspaltes, welche Hauptmaxima genannt werden. Unter diesen Hauptmaxima befinden sich weitere Nebenmaxima und -minima.

Bei dem Doppelspalt haben wir einen Spezialfall. Setzen wir N=2 in Gleichung 11.17 ein, so ergibt sich wegen $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, mit $\alpha = g/2 \cdot k \cdot \sin\theta$

$$I_N = 4\cos^2\left(\frac{\pi g \sin\theta}{\lambda}\right) \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \tag{11.19}$$

Übung 2: Überlegen Sie sich nun genauer wie die Hauptmaxima, Minima und Nebenmaxima zueinander angeordnet sind. Wo liegen sie?

Übung 3: Was geschieht mit dem Intensitätsmuster, wenn N sehr gross wird? Wie ist der Übergang zu $N \to \infty$?

11.4 Versuchsanordnung und Aufgabenstellung

11.4.1 Versuchsanordnung

Für diesen Versuch wird ein Laser der Wellenlänge 633 nm verwendet. Achtung: Nie direkt in das vom Laser emittierte Licht schauen! Dies kann zu irreparablen Schäden im Auge führen! Die Laserquelle ist auf einer optischen Bank befestigt, auf der verschiedene Blenden montiert werden können (s. Abbildung 11.6). Am Ende der Bank ist eine fahrbare Photozelle angebracht, die von einem Motor angetrieben wird. Sie misst die *Lichtintensität*. Ihr Signal wird zu einem Verstärker geführt, der sowohl linear als auch logarithmisch verstärkt. Beide Signale werden auf dem Bildschirm der MACs in einem virtuellen Instrument (vi) von LABVIEW angezeigt.
Achtung: Bei den weit separierten Doppelspaltblenden muss die Blende genügend weit vom Laser aufgestellt werden, damit beide Spalten voll beleuchtet werden.

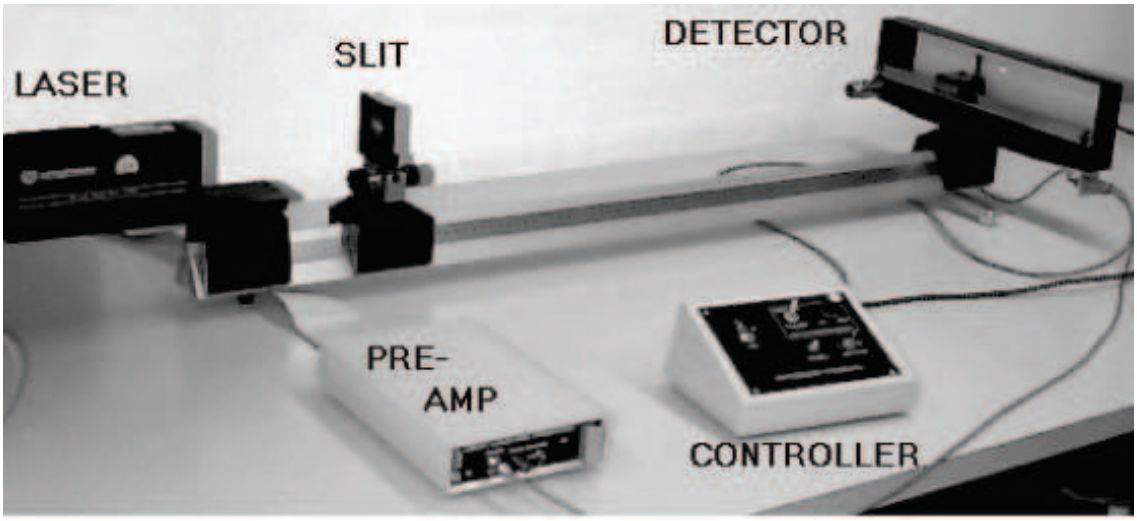


Abbildung 11.6: Photographie der Versuchsanordnung. Der Laser ist ein 0,95-mW-Helium-Neon-Gas-Laser (633 nm). Die Spalten sind in Metallfolien geätzt worden und werden durch Glasscheiben geschützt (diese keinesfalls entfernen!). Der Detektor ist eine 1mm breite Photodiode mit einer 0,1 mm breiten Metallschlitz-Maske, montiert auf einem in einer Richtung beweglichen Wagen. Der Kontroller erlaubt es, die Position, Geschwindigkeit und Richtung des Wagens zu steuern. Das Signal der Diode wird durch ein Koaxialkabel zum Vorverstärker geleitet, dessen Output mittels eines flachen Bandkabels zum Computer weitergegeben wird.

11.4.2 Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie den Eichfaktor (Winkel/Kanal) der Messanlage und geben Sie dessen Fehler an.

2. Nehmen Sie für alle vorhandenen Einspaltblenden das Beugungsmuster auf.

   - Bestimme Sie daraus die Spaltbreite und vergleiche Sie sie mit den Herstellerangaben.
   - Messen Sie die Intensitätsverhältnisse der ersten Nebenmaxima zum Hauptmaximum und vergleichen Sie mit der Theorie.
   - Überlegen Sie, wie sich die Heisenbergsche Unschärferelation äussert.

3. Bestimmen Sie für einige der vorhandenen Zwei- bis Fünfspaltblenden die Parameter D/λ und g/λ und stellen Sie die gemessenen und die mit der Formel berechneten Beugungsmuster graphisch dar. Vergleichen und diskutieren Sie allfällige Unterschiede.

Falls bei der Auswertung Unstimmigkeiten auftreten, versuchen Sie sie zu erklären.

11.5 Anleitung zum Versuch

11.5.1 Vorbereitung des Versuchs

Um die mit dem fahrenden Detektor gemessenen Beugungsmuster interpretieren zu können, muss der Umrechnungsfaktor Zeitkanal $\leftrightarrow$ Winkel θ bekannt sein. Diesen Faktor ermittelt man im Voraus mit Hilfe einer Einspaltblende, indem man deren Beugungsmuster in unabhängiger Weise bestimmt und danach mit der computergestützten Messung vergleicht.

Eichung mit einer Einspaltblende

Um die Winkel zwischen verschiedenen Beugungsminima möglichst genau bestimmen zu können, wird das Beugungsmuster eines (nominellen) 0,04-mm-Spalts an die Wand projiziert.

- Schalten Sie den Laser mehrere Minuten vor der ersten Messung ein, um Intensitätsschwankungen zu vermeiden.

- Entfernen Sie den Detektorhalter sorgfältig von der optischen Bank. Befestigen Sie den Blenden-Halter mit der Einspaltblende im Abstand von ca. 10 cm vom Laser auf der optischen Bank, damit der Lichtfleck breiter als der breiteste Spalt wird. Drehen Sie den Spalt in horizontale Lage, damit das Beugungsmuster vertikal an die Wand geworfen wird (weshalb vertikal?). Benutzen Sie das Metall-Messband um die Distanz zwischen Wand und Spaltblende zu bestimmen ($\sim$4m).

- Dunklen Sie den Raum ab und markieren Sie die Positionen (auf einem Blatt Papier) von einigen Beugungsminima. Verwenden Sie einen Massstab, um die Distanzen zwischen diesen Minima zu messen. Um ein möglichst genaues Resultat zu erhalten, sollten weit auseinanderliegende Minima verwendet werden. Typischerweise sollte beim 0,04-mm-Spalt das 10. Minimum noch sichtbar sein.

- Berechnen Sie die Winkel zu den gemessenen Minima. Bestimmen Sie nun mit der Herstellerangabe der Wellenlänge des Lasers von 633 nm und dem theoretischen Ausdruck für die Beugungsminima die experimentelle Breite des verwendeten Spalts. Berechne den Fehler der Messung und vergleiche das Resultat mit dem nominellen Wert der Spaltbreite. Wie gross ist der Fehler, der entsteht, weil das Muster auf eine flache Wand projiziert wird, anstatt auf eine zylindrische Fläche mit dem Spalt auf der Rotationsachse?

- Setzen Sie den Detektorhalter zurück auf die optische Bank (ganz ans Ende!) und schrauben Sie ihn fest.

Einstellung des Verstärkers

Der verwendete Verstärker verstärkt linear und logarithmisch (2 Ausgänge), beide Signale werden auf dem Bildschirm dargestellt. (Welches hat die grössere Ähnlichkeit mit dem menschlichen Auge? Spekulieren Sie, warum das von der Natur so eingerichtet worden sein könnte.) Stellen Sie den Verstärker so ein, dass er im Hauptmaximum gerade nicht in Sättigung betrieben wird. Dieser Schritt muss für alle Blenden wiederholt werden. Überlegen Sie sich warum!

- Benutzen Sie den Kontroller, um den Detektor zum hellsten Fleck des Beugungsbildes zu steuern. Lassen Sie den Detektor dort stehen. Der Vorverstärker soll so eingestellt werden, dass das Signal gerade noch nicht in Sättigung geht. Wenn das Signal in Sättigung geht, werden die höchsten Maxima oben flach abgeschnitten.

- Testen Sie die Einstellung mit einem Durchgang durch das Beugungsmuster. Achten Sie dabei auf Sättigung des Signals.

Konversionsfaktor Winkel/Kanal

Mit den Resultaten aus Abschnitt 11.5.1 kann nun der Konversionsfaktor Winkel/Kanal berechnet werden. Damit wird es erst möglich, die Resultate physikalisch zu interpretieren. Dazu setzt man die Detektorgeschwindigkeit auf „konstant“ und misst das Beugungsmuster der geeichten Einspaltblende. Der Menupunkt „Skalieren/Drucken“ des Fraunhofer-Programms erlaubt es nun, auf dem Bildschirm die Kanalnummern der an der Wand gemessenen Minima und Maxima zu bestimmen. Benutzen Sie alle gemessenen Winkel, um die Ungenauigkeiten zu minimieren und bestimmen Sie den besten Skalierungsfaktor Winkel/Kanal in Radian. Alle weiteren Messungen können dann mit demselben Skalierungsfaktor umgerechnet werden, wenn an der optischen Bank und an der Detektorgeschwindigkeit nichts mehr geändert wird.

11.5.2 Bedienungsanleitung für das Programm

Das LABVIEW Programm *Fraunhofer*

Zum Starten die Ikone *Fraunhofer* in der Fussleiste anklicken. Jetzt sollte man das Hauptmenu („Willkommen zum Versuch Fraunhoferbeugung“) sehen, das in Abb. 11.7 gezeigt ist. Von hier aus können alle für diesen Versuch notwendigen Unterprogramme gestartet werden.

- „Einstellungen“ ist zum Vorbereiten jeder Messung. Der Vorverstärker wird optimal eingestellt und der abzutastende Bereich wird ausgewählt.

- „Messen/Speichern“ ist zum Registrieren einer Anzahl Messwerte und zum Speichern der Messdaten in einer Datei.

- Bei „Skalieren/Drucken“ kann man eine Datei mit Messdaten einlesen, das Beugungsmuster zentrieren, skalieren und schliesslich ausdrucken.

- Der Menupunkt „klassische Formel“ erlaubt es, synthetische Beugungsmuster mit der klassischen Formel (11.17) herzustellen, zu skalieren und auszudrucken.

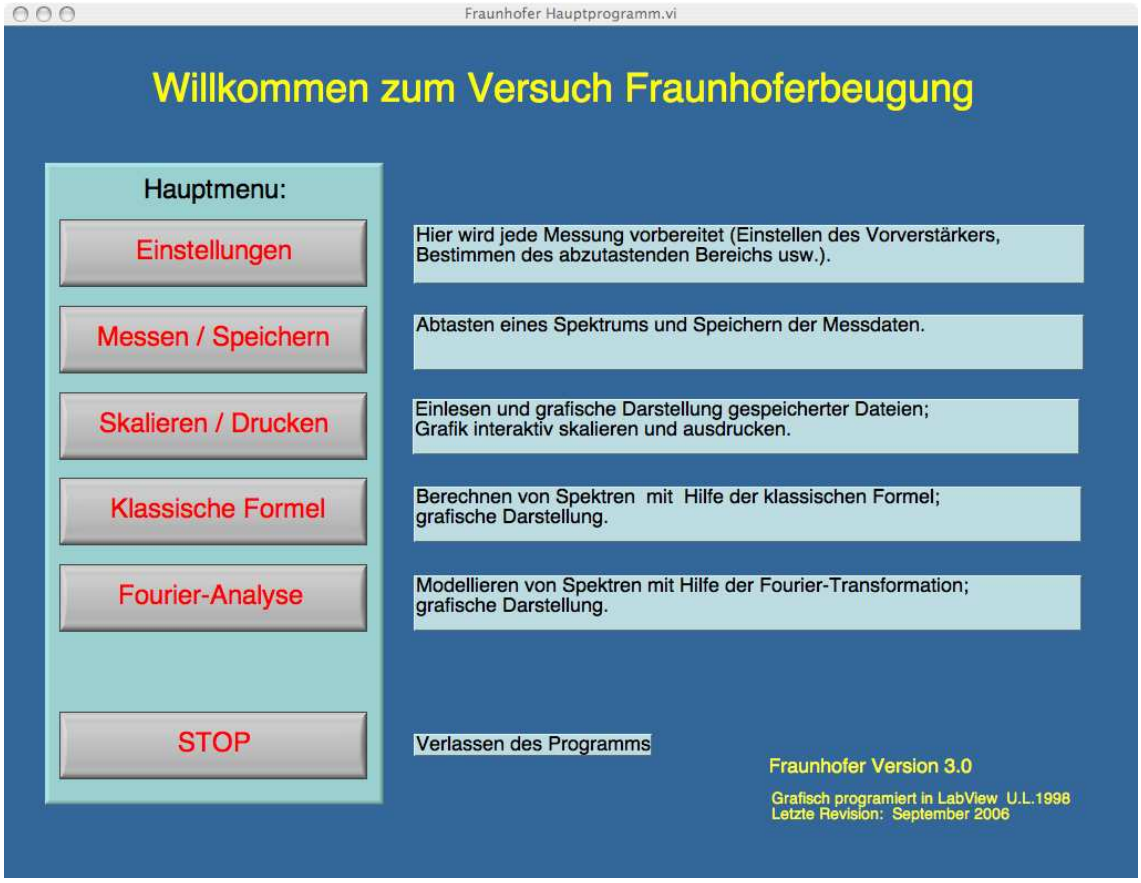

Fraunhofer Hauptprogramm.vi
Willkommen zum Versuch Fraunhoferbeugung
Hauptmenu:
Einstellungen
Hier wird jede Messung vorbereitet (Einstellen des Vorverstärkers, Bestimmen des abzutastenden Bereichs usw.).
Messen / Speichern
Abtasten eines Spektrums und Speichern der Messdaten.
Skalieren / Drucken
Einlesen und grafische Darstellung gespeicherter Dateien; Grafik interaktiv skalieren und ausdrucken.
Klassische Formel
Berechnen von Spektren mit Hilfe der klassischen Formel; grafische Darstellung.
Fourier-Analyse
Modellieren von Spektren mit Hilfe der Fourier-Transformation; grafische Darstellung.
STOP
Verlassen des Programms
Fraunhofer Version 3.0
Grafisch programiert in LabView U.L.1998
Letzte Revision: September 2006

Abbildung 11.7: Hauptmenu des Fraunhofer-Programms

- „Fourier-Analyse“ ist als Spielprogramm gedacht. Während man bei der Intensitätsberechnung mit der klassischen Formel auf Spalten der gleichen Breite und mit identischen Abständen beschränkt ist, kann mit diesem Programm das Beugungsmuster von Mehrspaltblenden mit variablen Breiten und Abständen berechnet werden.
- „Stop“ dient zum Beenden des Fraunhofer-Programms.

Einstellungen

Klickt man mit der Maus im Hauptmenu auf das erste Unterprogramm, sollte die Benutzeroberfläche des „virtuellen Instruments“ von Fig. 11.8 sichtbar werden.
Hier hat man drei Knöpfe zur Programmsteuerung, und zusätzlich können jederzeit die Achsen der Graphik manuell skaliert werden. Die obere Kurve ist vom logarithmischen Ausgang, die untere vom linearen Ausgang des Verstärkers. Hier kann man sich erst einmal mit der Datenaufnahme des Fraunhoferprogramms vertraut machen.

- „Start Schreiber“ schaltet den Detektor ein und beginnt mit der kontinuierlichen Datenaufnahme, bis „Stop Schreiber“ gedrückt wird.
- „Anzeige Löschen“ löscht die Anzeige.

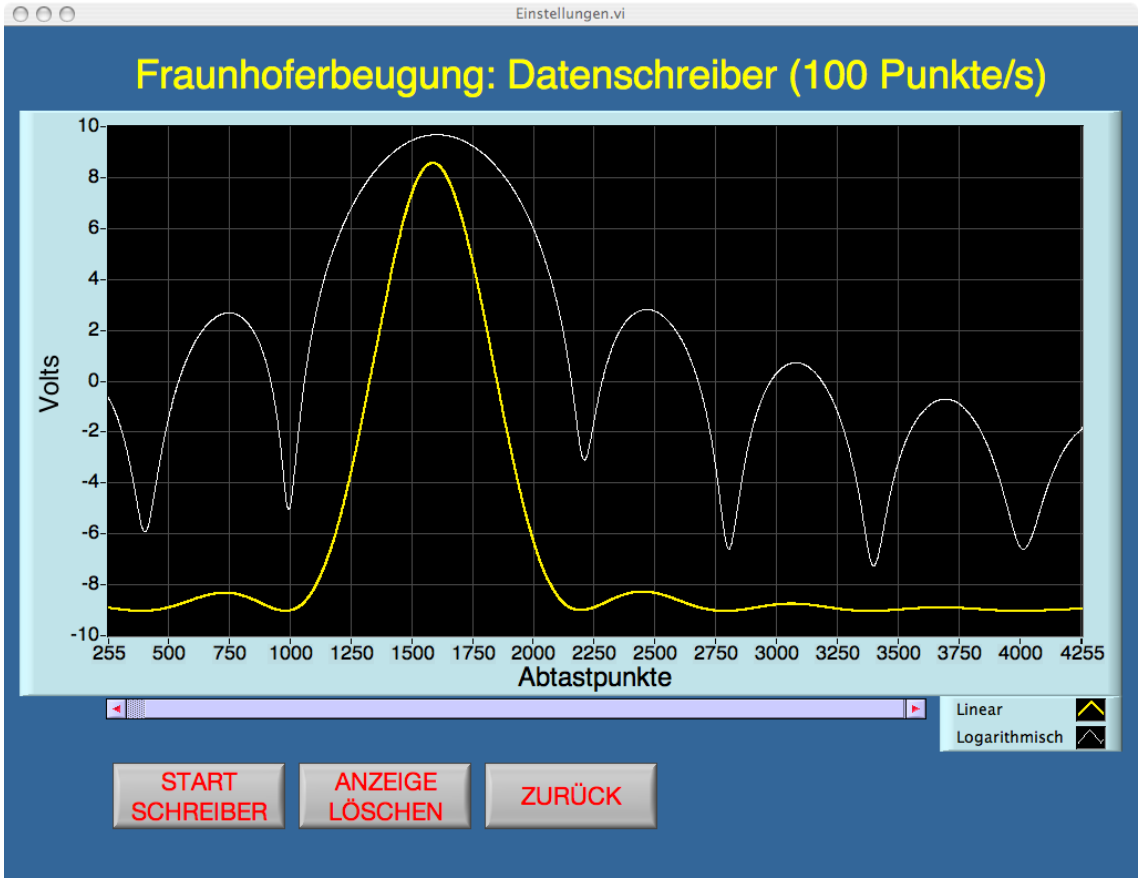


Abbildung 11.8: Einstellungen

- „Zurück“ beendet das Unterprogramm.

Messen / Speichern

Wählt man im Hauptmenu „Messen/Speichern“, dann sollte die Benutzeroberfläche von Abbildung 11.9 sichtbar werden.
Die Anzahl aufzunehmender Messpunkte muss im Voraus bei „Wieviele Samples“ eingegeben werden (der Defaultwert ist 8192). Die Abtastrate ist auf 100 pro Sekunde festgelegt und das Abfahren des maximal möglichen Messbereichs mit der eingestellten konstanten Geschwindigkeit dauert knapp 4 Minuten. Zur Steuerung der Messung stehen die folgenden sechs Tasten zur Verfügung:

- „Start Messung“ schaltet den Detektor ein und beginnt mit der Messung der vorgegebenen Anzahl Messpunkte mit fixer Abtastrate.
- „Stop Messung“ unterbricht die Messung vorzeitig.
- „Drucken“ schickt die Graphik (unskaliert) zum Drucker.
- „Speichern“ speichert die Aufnahme als Binärdatei im Ordner „Fraundata“.

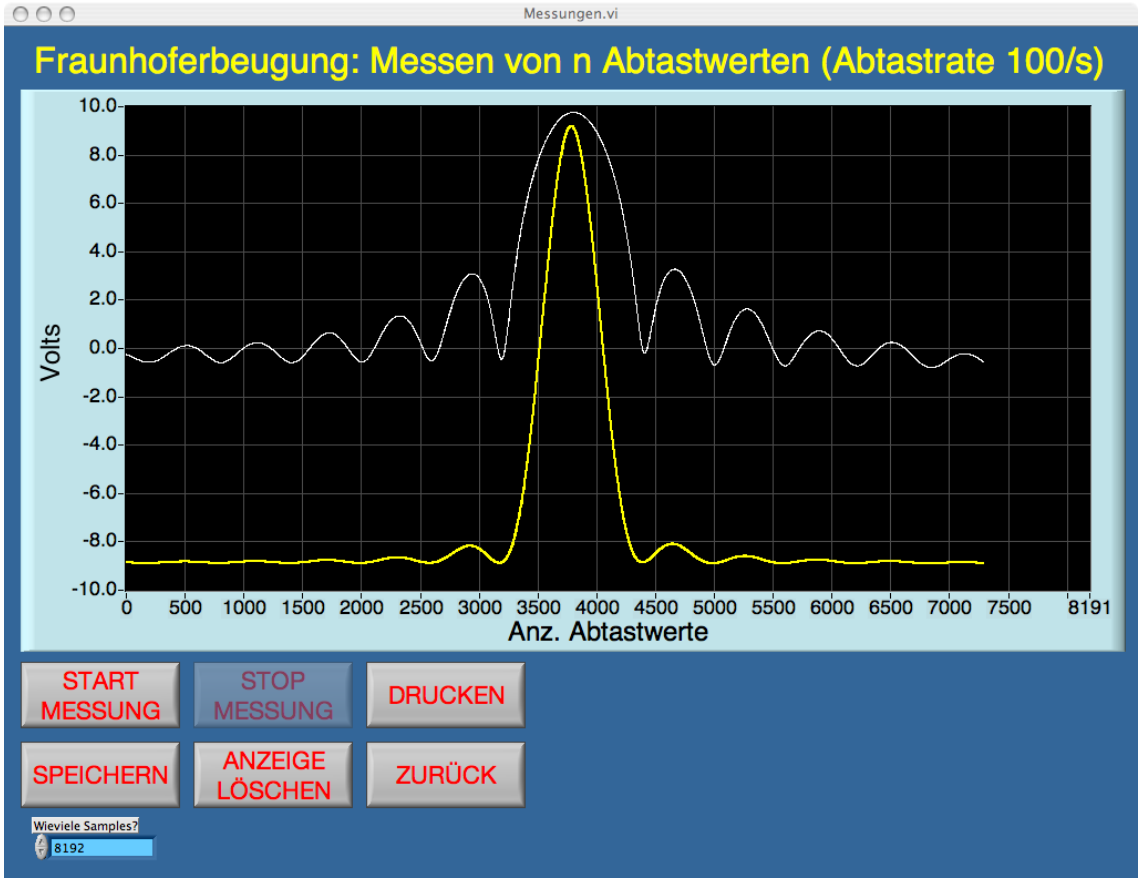


Abbildung 11.9: Messen/Speichern

- „Anzeige Löschen“ löscht die gemessenen Daten und die Anzeige.
- „Zurück“ beendet das Unterprogramm.

Skalieren / Drucken

Um vorher gespeicherte Messungen zu analysieren, wählt man im Hauptmenu das dritte Unterprogramm. Es erscheint das virtuelle Instrument mit der Benutzeroberfläche in Fig. 11.10. Hier hat man vorerst die folgenden vier Tasten zur Verfügung:

- „Einlesen“ dient zum Auswählen einer Datei mit Messdaten.
- „Skalieren/Drucken“ fährt fort in diesem Unterprogramm (siehe unten).
- „Anzeige Löschen“ löscht das eingelesene Beugungsmuster.
- „Zurück“ beendet das Unterprogramm.

Nach dem „Einlesen“ eines gemessenen Beugungsmusters fährt man weiter mit „Skalieren/Drucken“, worauf ein Bildschirm mit der Überschrift „Bitte Zentralkanal wählen und setzen“ sichtbar wird. Hier ist das normierte Beugungsmuster linear und logarithmisch dargestellt.

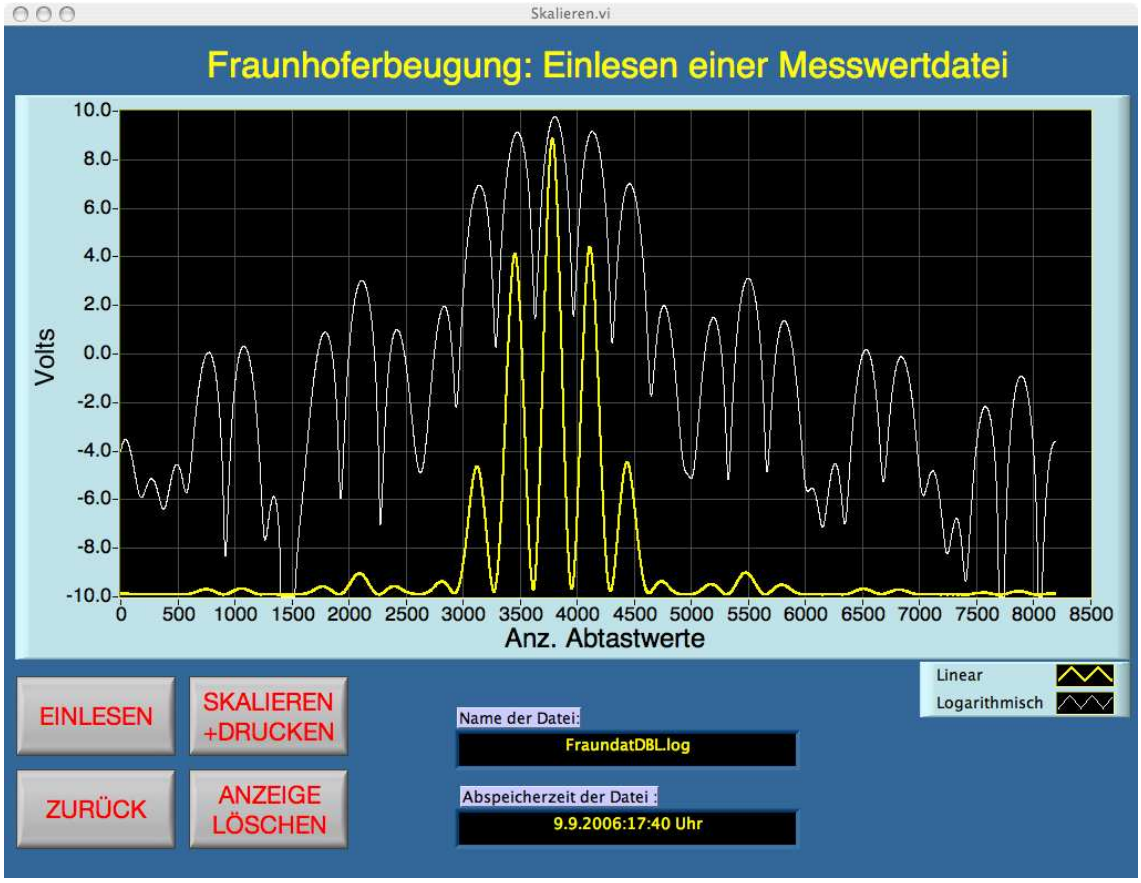


Abbildung 11.10: Skalieren/Drucken

Die x-Achse ist mit Kanalnummern (Nummern der Messpunkte) beschriftet. Der Anwender verschiebt nun das Fadenkreuz an die Stelle, wo er die Mitte des Beugungsbildes vermutet. Als Hilfe werden die Koordinaten des Fadenkreuzes dauernd in einem Fenster angezeigt. Ist die optimale Position gefunden, dann klickt man auf das Feld „Zentralkanal setzen“ und die Beschriftung der x-Achse wird so verschoben, dass der gewählte Zentralkanal neu Kanal 0 ist. Ist man zufrieden mit dem Ergebnis, so wählt man „Weiter“.

Nun erscheint ein neues Bild mit dem Titel „Bitte Winkelskalierung durchführen“. Das Ziel ist es, im Eingabefeld „Winkel/Kanal“ den Umrechnungsfaktor zwischen Beugungswinkel (in Radian) und der Anzahl Kanäle einzugeben. Dazu verwendet man die an der Wand gemessenen Winkel von Minima oder Maxima einer Einschlitzblende zur Eichung. Die entsprechenden Extrema können auf dem Bildschirm mit Hilfe zweier Fadenkreuze ausgemessen werden. In einem Kästchen wird als Hilfe dauernd der Abstand (in Kanälen) der beiden Fadenkreuze angezeigt. Hat man den Skalierungsfaktor eingegeben, dann klickt man auf „Skalieren“ und die Abszisse wird nun in Winkeleinheiten angeschrieben.

Jetzt kann man auf „Drucken“ klicken, dann erhält man einen Schirm, wo man aufgefordert wird, bei der Abszisse den gewünschten Winkelbereich für den Ausdruck einzustellen, bevor wirklich gedruckt wird.

Klassische Formel

Um mit der klassischen Formel 11.17 Modell-Beugungsfiguren zu berechnen, wählt man im Hauptmenu das vierte Unterprogramm, dessen virtuelles Instrument in Abbildung 11.11 dargestellt ist.
Die folgenden Parameter der klassischen Formel für die Fraunhoferbeugung von Licht der Wellenlänge λ an N Spalten der Breite D mit Gitterkonstante g müssen angegeben werden:

- „Winkel: Minimum“ und „Winkel: Maximum“ geben die Gesamtbreite des Winkelbereichs an (dimensionslose Einheiten in $\sin(\phi)$)
- „Zahl der Spalte“ ist N.
- „Spaltbreite“ ist D/λ.
- „Gitterkonstante“ ist g/λ.

Wenn die Parameter definiert worden sind, klickt man auf „Zeichnen“ und das Modell-Beugungsmuster wird logarithmisch und linear dargestellt. Die Beschriftung der Abszisse kann manuell geändert werden, damit der mit „Drucken“ erzeugte Ausdruck gut mit den ausgedruckten Messdaten verglichen werden kann.

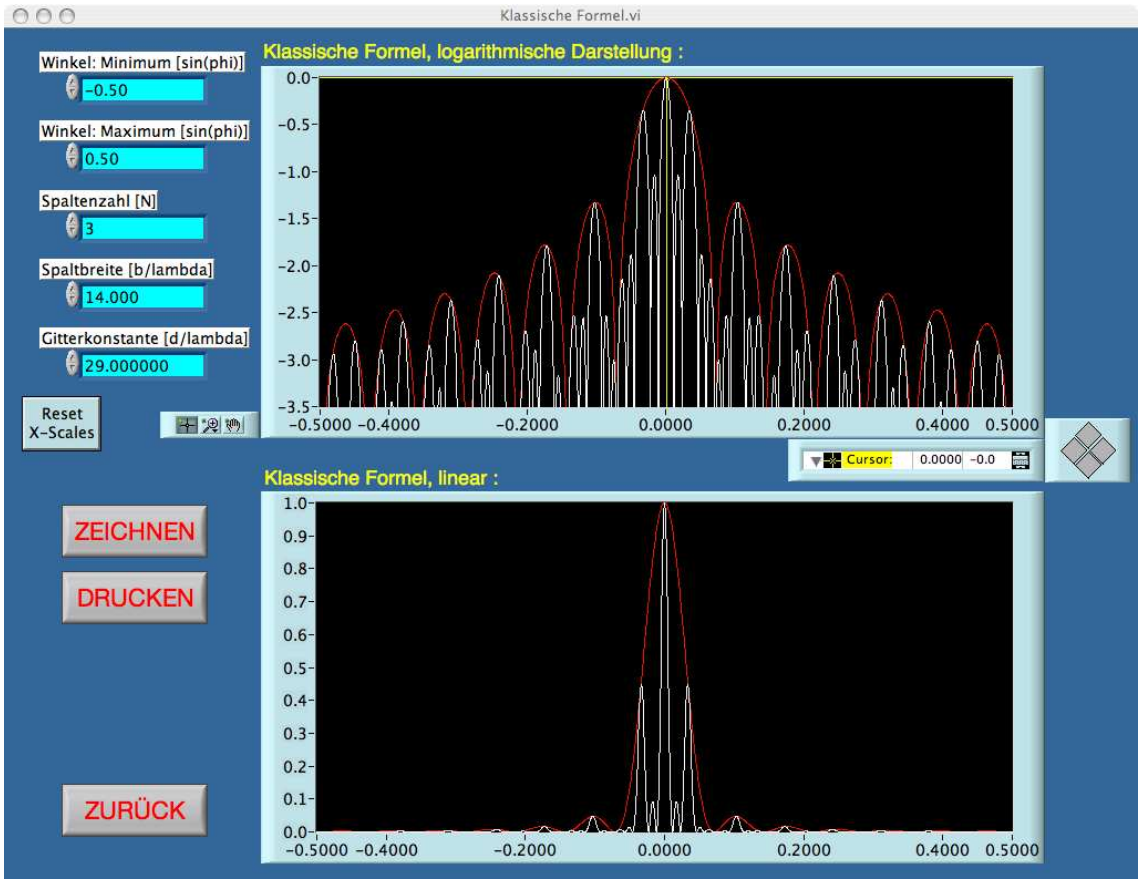


Abbildung 11.11: Klassische Formel

Vergleich von Messung und Modell

Um die gemessenen Beugungsmuster mit den berechneten zu vergleichen, empfiehlt es sich, auf folgende Weise vorzugehen:

- Lesen Sie mit „Skalieren/Drucken“ eine Messung ein, zentrieren und skalieren Sie sie.
- Drucken Sie einen oder mehrere interessante Ausschnitte des Musters aus.
- Bestimmen Sie auf dem Ausdruck (oder am Bildschirm) die Position einiger deutlich sichtbarer Minima oder Maxima, und identifizieren Sie sie gemäss der Gleichung 11.17.
- Bestimmen Sie nun aus der Position dieser Extrema die Parameter D/λ und g/λ. Welche Extrema führen zu den genausten Ergebnissen?
- Wählen Sie das Unterprogramm „Formel“ und geben Sie die gefundenen Parameterwerte ein.
- Lassen Sie das synthetische Beugungsmuster zeichnen und drucken Sie die gleichen interessanten Auschnitte wie für die Messungen aus.
- Vergleichen Sie die Resultate, diskutieren Sie die Unterschiede und verbessern Sie die Parameter wenn nötig.

Fourier-Analyse

Testen Sie im Untermenu „Fourier-Analyse“, was geschieht, wenn im Unterschied zur klassischen Formel 11.17 Breiten und Abstände der Spalten untereinander variieren. Dazu sind leider keine Spaltblenden verfügbar.
Wie verändert sich die Breite der Beugungssmaxima wenn die Spaltbreiten sehr gross (D$\rightarrow \infty$) oder sehr klein (D$\rightarrow 0$) werden?

11.6 Schlussdiskussion

Es sollte allen Teilnehmenden klar geworden sein,

- dass zwar das Intensitätsmuster der Fraunhoferbeugung durch die Fouriertransformierte der Blendenöffnung gegeben ist, damit aber nicht identisch ist!
- welcher Term im Ausdruck für die Intensität was bewirkt.
- dass LABVIEW einige Arbeit abnehmen kann.

Wir hoffen, dass uns dies mit diesem Versuch gelungen ist.

Lösungen zu den Übungen

Fehler bitte dem Assistenten / der Assistentin melden!

Lösung zu 1:

Dies führt auf eine transzendente Gleichung der Form $\tan x = x$. Die ersten Lösungen sind: $x = \pm 1,4303\,\pi, \pm 2.459\,\pi, \pm 3,4707\pi, \ldots$. Das Intensitätsverhältnis des Maximums erster Ordnung zum Hauptmaximum beträgt 0,047, das des Maximums zweiter Ordnung 0.017 und das des Maximums dritter Ordnung 0,008.

Lösung zu 2:
Wir diskutieren den von N abhängigen Faktor. Der langsam veränderliche, von N unabhängige Teil wirkt lediglich als Einhüllende und verändert die Resultate nur unwesentlich.
Hauptmaxima: $(\sin Nx/\sin x) = \pm N$, d. h. für $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Mit $x = k_x D/2 = kD/2 \sin\alpha$ heisst das für ganzzahliges m: $D\sin\alpha = m\lambda$. Damit liegen die Hauptmaxima für beliebiges $N > 1$ am selben Ort!
Minima (Nullstellen): $(\sin Nx/\sin x) = 0$, d. h. für $x = \pm\frac{\pi}{N}$ (1, 2, 3, ..., N-1, N+1, ...) (also mit Überspringen der x-Werte der Hauptmaxima). Damit sitzen zwischen zwei benachbarten Hauptmaxima $(N-1)$ Minima.
Nebenmaxima: Zwischen den $(N-1)$ Minima der Ordnung 0 muss je ein Maximum erster Ordnung liegen, d.h. zwischen zwei Hauptmaxima müssen $(N-2)$ Maxima erster Ordnung liegen. Für grosse N variiert $\sin Nx$ schneller als $\sin x$ und in der Nähe von $x \approx 0$ liegen die Maxima erster Ordnung ungefähr bei $x = \pm\frac{3\pi}{2N}, \pm\frac{5\pi}{2N}, \ldots$ Ihre Intensitäten ergeben sich durch Einsetzen in Gleichung 11.17. Für das erste Maximum erhält man leicht $I = I_1(\vec{a})_{\alpha\to 0}(\frac{1}{\frac{3\pi}{2N}})^2 \approx \frac{1}{22} I_N(\vec{a})_{\alpha\to 0}$.

Lösung zu 3:
$N \to \infty$: Die vorhergehende Diskussion hat klar gemacht, dass die Hauptmaxima immer schmaler werden müssen. Für kleine $k_x D/2$ gilt:

$$\frac{\sin Nk_xD/2}{\sin k_xD/2} \approx \frac{\sin Nk_xD/2}{k_xD/2} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \pi\delta(k_xD/2), \tag{11.20}$$

wo $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion ist. (Dies heisst nicht, dass I eine Deltafunktion ist! Vergleiche mit einschlägigen Notizen aus den theoretischen Vorlesungen.) Die Tatsache, dass die Hauptmaxima immer schmaler werden, erklärt auch, wie sich die Intensitäten für $\alpha \to 0$ von N Spalten quadratisch addieren können: Die Intensität wird andernorts reduziert.

Literaturverzeichnis

[1] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Akademie-Verlag, 1984.

[2] M. Born und E. Wolf, Principles of Optics, Pergamon Press, 1975.

[3] D. Halliday and R. Resnick, Fundamentals of Physics, John Wiley, 1970.

[4] E. Hecht, Optics, Second Edition, Addison-Wesley, 1987.

[5] E. Hecht, Optik, Übersetzung des obigen, Addison-Wesley, 1994.

[6] H. Leutwyler, Elektrodynamik und Optik, Skriptum ITP, Uni Bern, 1986.

Kapitel 12

Akustik

In der Akustik wird versucht, die mannigfaltigen Erscheinungen und das Verhalten des Schalls, seine Entstehung, Ausbreitung und Vernichtung zu verstehen. Da der Schall mit dem menschlichen Ohr wahrnehmbar ist, beschränkte sich die Akustik lange Zeit auf den hörbaren Schall. Inzwischen sind jedoch Schallempfänger entwickelt worden, welche Schall auch weit über den vom Menschen hörbaren Bereich (in Frequenz und Intensität) nachweisen können. In diesem Praktikumsversuch werden wir uns allerdings auf den hörbaren Schall beschränken. Die Eindrücke, welche der Schall auf den Menschen ausüben kann (Musik, Geräusch, Knall), werden wir nur soweit behandeln, wie sie mit Hilfe physikalischer Mittel erklärbar sind. Eindrücke im Sinne von Empfindungen gehören nicht in das Gebiet der Physik, ebenso wenig, wie die künstlerische Wirkung von Farben auf den Menschen.
Als Schallquelle verwenden wir in diesem Praktikumsversuch einen großen Gong. Den durch Anschlagen des Gongs erzeugten Klang werden wir mit elektronischen Hilfsmitteln analysieren und die Resultate letztlich mit dem eigenen Höreindruck vergleichen.

12.1 Einführung in die Akustik

Durch Berühren eines Schallsenders kann man sehr bald erkennen, daß die Schallerzeugung mit mechanischen Schwingungen verbunden ist – man berühre z.B. die schwingende Membran eines Lautsprechers, die schwingende Saite eines Musikinstrumentes oder den angeschlagenen Gong unseres Praktikumsversuches. Diese mechanischen Schwingungen des Schallerzeugers werden als Dichteschwankungen auf die Luft übertragen, welche von unserem Gehör wahrgenommen werden.
Im Sprachgebrauch werden für verschiedene Erscheinungen des Schalls Ausdrücke wie Ton, Klang, Geräusch, Knall und viele mehr verwendet. Diese Bezeichnungen lassen sich auch physikalisch unterscheiden.

- Ein **Ton** wird durch eine reine sinusförmige Schwingung erzeugt. Er läßt sich auf einer Frequenzskala als einzelne, scharfe Linie darstellen, wobei die Höhe ein Maß für die Amplitude der Schwingung ist. Dies gilt strenggenommen jedoch nur, wenn der Ton unendlich lange anhält. Berücksichtigt man die endliche Dauer eines Tones, so entspricht dies nach der *Fourier–Analyse* (auch Frequenzanalyse, vgl. Kap. 12.3) einer Verbreiterung der Linie, welche um so stärker ist, je weniger Perioden durchlaufen werden:

  $$\Delta f \cdot \Delta T \geq 1 \tag{12.1}$$

  wobei Δf die Unsicherheit in der Frequenzbestimmung und ΔT die Dauer des Tones darstellen. Diese Beziehung heißt **klassische Unschärferelation** und ist gleich 1, wenn bei der Frequenzbestimmung keine weiteren Unsicherheiten auftreten (z.B. eine verrauschte Amplitudenmessung).

- Dem **Klang** entspricht physikalisch eine beliebige *nicht sinusförmige* periodische Schwingung in der Grundfrequenz (dem Grundton), welche i.A. die tiefste Frequenz im Frequenzspektrum ist[1]. Gemäß der Fourier–Analyse ist ein Klang gleichbedeutend mit der

[1] Untertöne, d.h. Töne, bei der halben, drittel, ..., Frequenz des Grundtones, entstehen in den klassischen Instrumenten nur ausnahmsweise, werden hingegen in elektronischen Instrumenten bewußt durch Frequenzteilung erzeugt.

Summe von harmonischen Tönen, d.h. mit der Überlagerung von Tönen, deren Frequenzen sich zueinander wie ganze Zahlen verhalten. Ein musikalischer „Ton“ (abgesehen von den leblosen Sinustönen von manchen elektronischen Instrumenten) ist physikalisch gesehen immer ein Klang, nämlich die Überlagerung mehrer Sinustöne.

- Die in einem **Geräusch** enthaltenen Frequenzen unterliegen dagegen keiner Gesetzmäßigkeit mehr, ein Geräusch ist also ein vollkommen aperiodischer Vorgang, bei dem Frequenzen und Amplituden statistisch wechseln. Bekannt ist das Rauschen turbulenter Luftströmungen (Wind). Treten alle Frequenzen mit gleicher Amplitude auf, so spricht man in Analogie zum Licht vom **weißen Rauschen**.
- Ein **Knall** enthält kurzzeitig alle Frequenzen eines großen Bereiches. Die Amplituden klingen dabei rasch ab, so daß meist nur wenige Perioden durchlaufen werden.

Die einfachste Schwingung, der reine Ton, kommt in der Natur praktisch nicht vor; ein exakter Ton läßt sich nur mit elektronischen Hilfsmitteln erzeugen. Hörbare, mechanisch erzeugte Schwingungen sind in der Regel keine Töne, sondern Klänge. Sie enthalten neben dem Grundton (Grundfrequenz) weitere Töne, die **Obertöne**. Die Obertöne sind es auch, die es uns ermöglichen, zwischen den Klängen der verschiedenen Musikinstrumente zu unterscheiden. Die **Klangfarbe** ist nämlich im wesentlichen durch die Anzahl und relative Intensität der Obertöne bestimmt. Zudem ist für die Klangfarbe der Einschwingvorgang des schwingungsfähigen Systems maßgebend. So können anfänglich Obertöne auftreten, welche zu einem späteren Zeitpunkt nicht mehr vorhanden sind. Es liegt also ein zeitlich veränderliches Klangspektrum vor, welches sich nur dreidimensional darstellen läst. Wie bereits *Helmholtz*[2] gezeigt hat, ist die Klangfarbe von der Phasenlage der Obertöne untereinander und zum Grundton weitgehend unabhängig.

Physikalisch besteht der Unterschied zwischen einem musikalischen Einzel„ton“ und einem **Akkord** nur in der relativen Amplitude der Oberschwingungen: Im Akkord sind einige von ihnen besonders betont, nämlich die musikalischen Einzeltöne. Bis zu einem gewissen Grad kann man das Harmoniesystem der Musik aus der Obertonreihe ableiten.

Aufgabe 1: Die Anregung einer Geigensaite mit dem Bogen erfolgt beim normalen Spiel so, daß die Auslenkung der Saite ziemlich genau eine Sägezahnschwingung in der Zeit ausführt (vgl. Abb. 12.1). Bestimmen Sie das Frequenzspektrum der Geige mittels Fourierzerlegung (die Fourierreihe). Zeichnen Sie das Frequenzspektrum für den musikalischen Ton a^1(440 Hz) auf. Setzen Sie die einzelnen Frequenzkomponenten mit anderen als der ursprünglichen Phasenlänge zusammen und zeichnen Sie die so erhaltene Funktion auf.

Abschließend muß noch angemerkt werden, daß in Gasen und Flüssigkeiten nur Longitudinalwellen möglich sind, während in Festkörpern Longitudinal- und Transversalwellen, sowie bei Stab- und Plattengestalt des Festkörpers auch Dehnungs- und Biegewellen auftreten können. Wir haben nun schon vermehrt den Begriff Amplitude gebraucht. Diesen und alle weiteren physikalischen Begriffe zur Charakterisierung des Schalls, wollen wir nun genau definieren. Betrachten wir zunächst den **Schallausschlag** an einem festen Ort (die Auslenkung eines Moleküls von seiner Nominalposition)

[2]Herman Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894) hat neben anderen großen Leistungen in der Physik 1862 das Buch „Zur Empfindung des Tones als physiologische Basis zur Theorie der Musik“ publiziert.

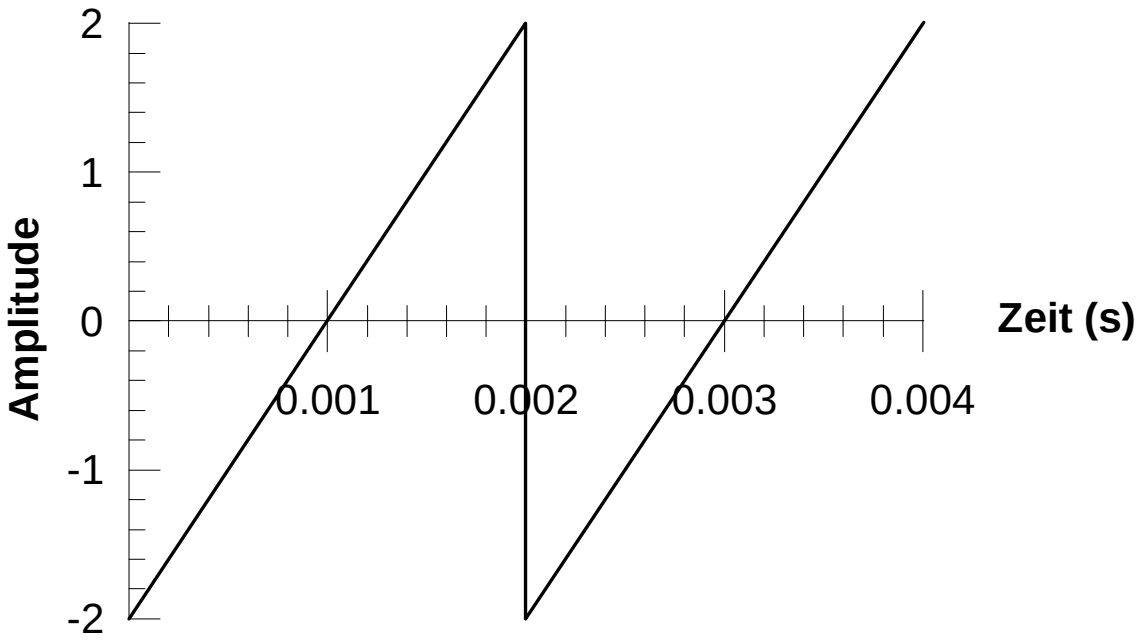


Abbildung 12.1: Sägezahnschwingung mit einer Amplitude von 2

$$\xi(t) = \hat{\xi}\sin(\omega t) \tag{12.2}$$

mit der Schwingungsamplitude $\hat{\xi}$ und der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$. Die zeitliche Änderung des Schallausschlages ξ, also die Größe $d\xi/dt$, ist die **Schallschnelle**

$$\nu(t) = \hat{\nu}\cos(\omega t) = \omega\hat{\xi}\cos(\omega t), \quad \text{womit} \quad \hat{\nu} = \omega\hat{\xi} \tag{12.3}$$

mit der Schnelleamplitude $\hat{\nu}$. Sie stellt die Geschwindigkeit der ausgelenkten Moleküle dar und ist nicht mit der Schallgeschwindigkeit c zu verwechseln!
Als dritte Größe betrachten wir den **Schallwechseldruck** p, dessen Amplitude $\hat{p}$ in einer ebenen Welle mit der Schnelleamplitude durch den **Schallwiderstand**[3] L_s verknüpft ist:

$$\hat{p} = \hat{\nu}\rho c = \omega\hat{\xi}\rho c \tag{12.4}$$

$$L_s = \rho c \tag{12.5}$$

wobei ρ die Dichte und c die Schallgeschwindigkeit des Mediums sind. Es ist wichtig zu wissen, daß die Schallgeschwindigkeit in der Luft im wesentlichen *unabhängig* von der Frequenz ist. Erst im Ultraschallbereich (also bei sehr großen Frequenzen) stimmt dies nicht mehr. Auch bei großen Schwingungsamplituden (Explosionen) wächst die Schallgeschwindigkeit mit der Amplitude.

[3]In Analogie zum elektrischen Widerstand kann man beim Schallwiderstand die elektrische Stromstärke der Schnelleamplitude und die elektrische Spannung der Druckamplitude gegenüberstellen. Abgesehen von der Bequemlichkeit, die diese Ausdrucksweise mit sich bringt, darf man nicht übersehen, daß die Größe ρc – im Gegensatz zum ohmschen Widerstand – keine Energie in Wärme umwandelt!

Für die Schallgeschwindigkeit in Gasen gilt die aus der Wärmelehre bekannte Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{p_m \kappa}{\rho}}$$

worin p_m der statische Druck, ρ die statische Dichte und $\kappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen molaren Wärmekapazitäten des Mediums darstellen. Da bei der Schallausbreitung weder Wärme zu- noch abgeführt wird, der Vorgang somit *adiabatisch* verläuft, muß natürlich die Poisson- oder Adiabatengleichung ($pV^\kappa = \text{const.}$) für die Änderung des Zustandes herangezogen werden.

Der Ausdruck p_m/ρ ist auch aus der Wärmelehre bekannt, und er hängt mit dem Wert für die Temperatur $T = 0°\text{C}$ folgendermaßen zusammen:

$$\frac{p_m}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}\left(1 + \frac{T}{T_0}\right), \quad \text{mit} \quad T_0 = 273,15\text{K} \tag{12.6}$$

Somit ergibt sich für trockene Luft ($p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa, $\rho_0 = 1,293$ kg/m^3 und $\kappa = 1,40$)

$$c = \sqrt{\frac{p_0 \kappa}{\rho_0}\left(1 + \frac{T}{T_0}\right)} = 331,2\sqrt{1 + \frac{T}{T_0}}, \quad [c] = \text{m/s}.$$

Die mittlere **Energiedichte** oder Schalldichte $\overline{E}$ berechnet sich aus der kinetischen Energie E_{Kin} pro Volumen der Welle

$$E_{Kin} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2\hat{\xi}^2\cos^2(\omega t). \tag{12.7}$$

Unter Berücksichtigung, daß bei einer Schwingung die mittlere kinetische Energie gleich der mittleren potentiellen Energie ist, ergibt sich durch Mittelwertbildung

$$\overline{E} = \langle E_{Kin}\rangle + \langle E_{Pot}\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\hat{\xi}^2 = \frac{1}{2}\rho\hat{\nu}^2, \quad \left[\overline{E}\right] = \text{J/m}^3. \tag{12.8}$$

Die **Schallintensität** I ist die pro Zeiteinheit durch eine zur Ausbreitungsrichtung senkrecht stehende Fläche hindurchtretende Energiedichte:

$$I = \overline{E}c = \frac{1}{2}\rho\omega^2\hat{\xi}^2 c = \frac{1}{2}\hat{p}\hat{\nu} = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{\rho c}, \quad [I] = \text{W/m}^2. \tag{12.9}$$

Somit füllt die Schallintensität einen Quader von 1m^2 Grundfläche und einer Höhe gleich dem Produkt aus Schallgeschwindigkeit und Zeit. In jedem Kubikmeter ist die Energiemenge $\overline{E} = I/c$ enthalten.

Die gesamte Energie pro Zeiteinheit, die eine Schallquelle in den ganzen Raum ausstrahlt, wird **Schalleistung** P genannt. Sie wird bestimmt, indem man die Schallintensität über die Oberfläche eines Volumens integriert, welches die Schallquelle beinhaltet.

Daß sich der Schall auch in Flüssigkeiten ausbreiten kann, haben Colladon und Sturm 1827 durch Versuche im Genfersee bewiesen, indem sie eine Glocke unter Wasser anschlugen und die Zeit maßen, welche verging, bis die von der Glocke ausgehenden Schallwellen an einem

weit entfernten Punkt mittels eines ins Wasser getauchten Höhrrohres wahrgenommen wurden.

Allgemein gilt für die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \tag{12.10}$$

wobei K der Kompressionsmodul der Flüssigkeit ist ($1/K$ ist die Kompressibilität der Flüssigkeit). Bei 20°C ergibt sich für Wasser eine Schallgeschwindigkeit von 1465 m/s.

12.2 Die menschliche Schallwahrnehmung

12.2.1 Die Schallwahrnehmung mit dem Ohr

Die kleinste Schwingungsamplitude, die unser Ohr an seinem Empfindlichkeitsmaximum bei etwa 1000 Hz noch wahrnehmen kann, beträgt etwa 1 Å. Bei noch größerer Empfindlichkeit unseres Ohres wäre die Brown'sche Molekularbewegung hörbar. Dagegen beträgt die Schwingungsamplitude im Maul einer größeren Orgelpfeife etwa 1 cm. Am anderen Ende der Skala der Empfindlichkeit des menschlichen Ohres liegt die Schmerzgrenze, welche uns vor überhöhter Schallintensität warnt. Bei der günstigsten Frequenz (1 – 4 kHz) umspannt unser Hörbereich 13 Zehnerpotenzen. Für einige übliche Schallquellen sind die Schalleistungen in Tabelle 12.1 angegeben.
Dieser große Wertebereich, den unser Ohr bei der Schallintensität abzudecken in der Lage ist (s. auch Tab. 12.2), bedingt, daß die subjektive Empfindung der Schallintensität, die **Lautstärke**, anderen Gesetzen folgen muß, als die Schallintensität. Die Natur bedient sich eines auch bei Mathematikern sehr beliebten Tricks, nämlich der besseren Erfassung eines großen Wertebereiches durch Logarithmieren. Die menschlichen Wahrnehmung der Schallintensität, die Lautstärke, ist proportional dem Logarithmus der Schallintensität. Daß sich die Schallintensität geändert hat merkt man erst, wenn diese Änderung einen bestimmten Faktor (zwischen 20 und 25%) erreicht hat. Um der Natur nun Rechnung zu tragen, mißt man die Lautstärke L in dB (für Dezibel). Ein dB entspricht einem Schallintensitätsverhältnis von

$$\sqrt[10]{10} = 1,259,$$

Schallquelle	P **in Watt**
Unterhaltungssprache	$\approx 2 \cdot 10^{-6}$
Höchstleistung der menschlichen Stimme	$\approx 2 \cdot 10^{-3}$
Geige (fortissimo)	$\approx 1 \cdot 10^{-3}$
Flügel (fortissimo)	$\approx 2 \cdot 10^{-1}$
Trompete (fortissimo)	$\approx 3 \cdot 10^{-1}$
Orgel (fortissimo)	1 – 10
Ultraschallsender	10^3
Pneumatischer Lautsprecher (bis 1 kHz)	10^4

Tabelle 12.1: Leistungen verschiedener bekannter Schallquellen

was etwa dem Unterscheidungsvermögen des Ohres entspricht. Somit ergibt sich für die Lautstärke

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{\hat{p}}{\hat{p_0}}\right), \quad [L] = \text{dB}.$$

Der gerade noch hörbare Ton der Normalfrequenz 1 kHz soll 0 dB haben (Schallintensität I_0). Die Schmerzschwelle liegt somit bei 130dB. Die minimale Schallintensität, die das menschliche Ohr noch nachweisen kann, ist $I_0 = 5 \cdot 10^{-13}$ W/m^2, der entsprechende Druck $\hat{p_0} = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa. In den Tabellen 12.1 und 12.2 sind Schalleistungen bzw. Schallintensitäten einiger üblicher Schallquellen (Musikinstrumente bzw. Lärm) zusammengestellt, um ein Gefühl für die Lautstärkeskala zu geben.

Aufgabe 2: Welche Kraft wird von der Schallwelle auf das Trommelfell ausgeübt (Durchmesser ca. 9 mm), wenn die Lautstärke der Schmerzschwelle von 130 dB entspricht?

Aufgabe 3: Die Lautstärke eines lauten Motors, welcher mit 3000 U/min läuft und auf einem Betonfundament steht, ist am Ort des Beobachters in 1m Entfernung 95 dB. Bestimmen Sie die Amplituden des Schallausschlages, der Schallschnelle, des Schallwechseldrucks und der Schallintensität am Ort des Beobachters, sowie die Schalleistung der Schallquelle.

Die logarithmische Empfindung der Lautstärke gilt auch für viele andere menschliche Wahrnehmungen, z.B. die Wahrnehmung der Frequenz, das Unterscheidungsvermögen von Gewichten, Helligkeiten usw.

Schallquelle	L **in Dezibel**	**menschliche Empfindung**
Düsenjet bei Start (in 60m Abstand)	120	
Baulärm	110	nicht tolerierbar
Schreien (in 1,5m Abstand)	100	
Großer Lastwagen (in 15m Abstand)	90	sehr laut
Straßenverkehr, städtisch	80	
Innenraum des Autos	70	laut
Normales Gespräch (in 1m Abstand)	60	
Büro, Klassenzimmer	50	moderat
Wohnzimmer	40	
Schlafzimmer bei Nacht	30	leise
Radiostudio	20	
Blätterrauschen	10	kaum hörbar
	0	

Tabelle 12.2: Schallintensitäten L einiger üblicher Schallquellen

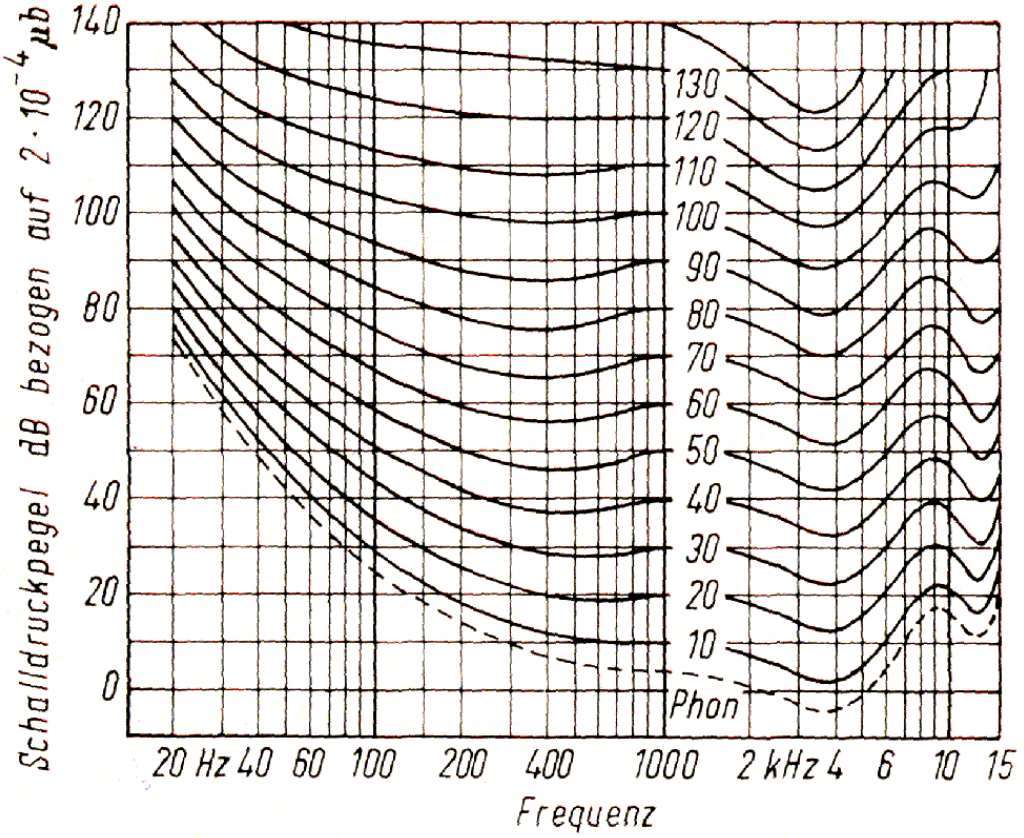


Abbildung 12.2: Kurven gleicher Lautstärke, die gestrichelte Linie stellt die Hörschwelle dar

Die Dezibel–Skala gibt jedoch nicht genau die Hörempfindung wider, diese ist auch von der Frequenz abhängig. An der unteren und oberen Hörgrenze (bei 16 Hz bzw. ca. 16 kHz) ist die Empfindlichkeit des Ohres gering, während sie bei etwa 4000 Hz maximal ist. Die Schallintensität muß an den Hörgrenzen also wesentlich höher sein, als am Empfindlichkeitsmaximum, wenn in beiden Fällen die gleiche Empfindung hervorgerufen werden soll. Zur Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit der Hörempfindlichkeit hat man die Einheit *Phon* eingeführt. Die Lautstärke in Phon ist gleich der Schallintensität eines gleich laut empfundenen 1 kHz-Tones. Der Zusammenhang zwischen der Phon- und der Dezibel–Skala wird durch die Kurven gleicher Lautstärke widergegeben (vgl. Abb. 12.2).

Die Hörempfindlichkeit hat ein Maximum zwischen 3500 und 4000 Hz, nahe der Resonanz im äußeren Hörkanal. Ein weiteres Maximum befindet sich an der Stelle der zweiten Resonanz bei ca. 13 kHz.

Mittlerweile hat sich gezeigt, daß die Phon-Skala die Hörempfindung nicht genau widergibt, weshalb verbesserte Lautstärkeskalen entwickelt wurden, auf die wir hier jedoch nicht näher eingehen wollen.

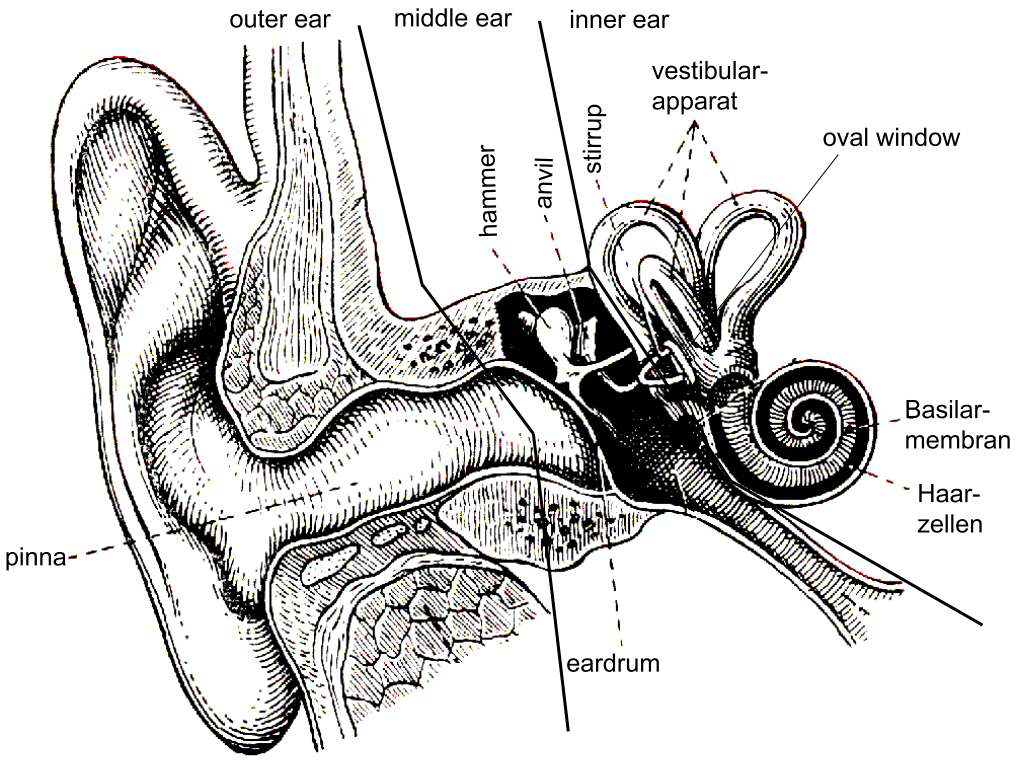


Abbildung 12.3: Das menschliche Ohr. Zur besseren Darstellung sind das Mittelohr und das innere Ohr vergrößert dargestellt.

12.2.2 Das Ohr

Üblicherweise wird die Beschreibung des Ohres auf die drei Hauptteile, das äußere Ohr, das Mittelohr und das innere Ohr aufgeteilt. Eine schematische Darstellung des Ohres ist in Abbildung 12.3 widergegeben.
Die Bündelung des Schalls durch die Ohrmuschel (*pinna*) und den sich leicht verjüngenden Gehörgang (*outer ear*) verstärkt den Schalldruck zwischen Außenraum und Trommelfell (*eardrum*) auf etwa den doppelten Wert (die Schallintensität also auf das Vierfache).
Im Mittelohr werden die Schwingungen des Trommelfells auf das ovale Fenster (*oval window*), den Eingang zum Innenohr (*inner ear*), über die drei Gehörknöchelchen (*ossicles*) Hammer, Amboß und Steigbügel (*hammer, anvil, stirrup*) übertragen. Das Trommelfell hat etwa 1 cm^2 Fläche, das ovale Fenster etwa 0,05 cm^2, dementsprechend verjüngen sich die Gehörknöchelchen. Die Form der Gehörknöchelchen bewirkt eine Übersetzung der Kraft vom Trommelfell auf das ovale Fenster mit dem Verhältnis 3:1, das Flächenverhältnis ist etwa 20:1, was zusammen ein Verhältnis der Druckamplituden von 60:1 bewirkt. Der Grund dafür liegt in der notwendigen Anpassung der Schallwiderstände von Luft auf Wasser (die Zellflüssigkeit im inneren Ohr, Endolymphe, ist praktisch Wasser), so daß die Schallintensitäten vor und nach der Grenzfläche (dem ovalen Fenster) gleich sind:

$$I_{Luft} = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2_{Luft}}{\rho_{Luft} c_{Luft}} = I_W = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2_W}{\rho_W c_W} \tag{12.11}$$

Für das Druckverhältnis ergibt sich dann:

$$\frac{\hat{p}_W}{\hat{p}_{Luft}} = \sqrt{\frac{\rho_W c_W}{\rho_{Luft} c_{Luft}}} = 58,5 \tag{12.12}$$

Das Mittelohr sorgt also für eine fast ideale Anpassung der Schallwiderstände. An einer normalen Luft–Wasser–Grenzfläche erfolgt üblicherweise totale Reflexion des Schalls. Jeder Taucher weiß, wie schwer der Schall aus der Luft seiner Stimmorgane ins Wasser zu übertragen ist.
Im inneren Ohr befindet sich neben dem Vestibularapparat (unserem Gleichgewichtsorgan) noch die Schnecke (*cochlea*), welche aus 2,5 Windungen besteht. Die Schnecke ist durch die 3,3 cm lange *Basilarmembran* in zwei Kanäle geteilt. Auf der Basilarmembran ist das Cortische Organ gelagert, ein sehr kompliziertes Gebilde, in welchem die Gehörnerven an den mit feinen Härchen versehenen Rezeptorzellen (*Haarzellen*) enden. Wenn nun Schall die Basilarmembran über das ovale Fenster erregt, so ist der Ort der maximalen Auslenkung von der Erregungsfrequenz abhängig. Hohe Frequenzen erzeugen ein Maximum der Auslenkung nahe des ovalen Fensters, bei tiefen Frequenzen liegt das Maximum am anderen Ende der Basilarmembran. Die Hörnerven übertragen nun die ortsabhängige Erregung der Rezeptorzellen, was nach der Verarbeitung des Signals durch die Nervenzellen eine Art Fourier–Analyse darstellt.

12.3 Die Fouriertransformation

Ein physikalischer Ablauf kann entweder im Zeitbereich, d.h. durch Angabe einer Größe h im Zeitraum in Abhängigkeit von der Zeit t oder im Frequenzraum, d.h. durch Angabe einer Amplitude H in Abhängigkeit von der Frequenz f, angegeben werden. $H(f)$ ist im allgemeinen eine komplexe Funktion, sie enthält sowohl die Amplitudeninformation, als auch die Phaseninformation der Größe $h(t)$ in Abhängigkeit von der Frequenz f.
Oftmals ist es für das Verständnis der physikalischen Vorgänge vorteilhaft die spektrale Information, also die Funktion $H(f)$, zur Verfügung zu haben. Für viele Fragestellungen ist es nützlich, von $h(t)$ und $H(f)$ als zwei verschiedene Darstellungen der gleichen physikalischen Größe zu sprechen. Der Übergang vom Zeit- in den Frequenzraum und zurück geschieht durch die sogenannte **Fouriertransformation**, welche folgendermaßen lautet:

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2\pi i f t} dt \\ h(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{2\pi i f t} df \end{aligned} \tag{12.13}$$

Wenn t in Sekunden gemessen wird, so ist die Einheit für f *Hertz*. Die Gleichungen lassen sich aber auch mit anderen Einheiten formulieren, z.B.:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \\ h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned} \tag{12.14}$$

wobei ω die Kreisfrequenz (in Radian pro Sekunde) ist (und $1/T = f$).

Wenn gilt	dann folgt
$h(t)$ ist reell	$H(-f) = [H(f)]^*$
$h(t)$ ist imaginär	$H(-f) = -[H(f)]^*$
$h(t)$ ist gerade	$H(-f) = H(f)$, also ist $H(f)$ gerade
$h(t)$ ist ungerade	$H(-f) = -H(f)$, also ist $H(f)$ ungerade
$h(t)$ ist reell und gerade	$H(f)$ ist reell und gerade
$h(t)$ ist reell und ungerade	$H(f)$ ist imaginär und ungerade
$h(t)$ ist imaginär und gerade	$H(f)$ ist imaginär und gerade
$h(t)$ ist imaginär und ungerade	$H(f)$ ist reell und ungerade

Tabelle 12.3: Sonderfälle der Fouriertransformierten $H(f)$

Ist h z.B. eine Funktion der Länge (in Meter), so entspricht H einer Funktion der inversen Wellenlänge (Schwingungen pro Meter). Die Funktionen $h(t)$ und $H(f)$ sind im allgemeinen komplexwertige Funktionen. In Tabelle 12.3 sind ein paar Sonderfälle aufgeführt.
Die gesamte Leistung[4], welche in einem Signal enthalten ist, muß natürlich gleich sein, ob wir nun das Signal im Zeitraum oder im Frequenzraum betrachten:

$$P_{tot} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \tag{12.15}$$

Dieser Sachverhalt ist auch als *Parsevals Theorem* oder *Vollständigkeitsrelation* bekannt. Oftmals will man jedoch wissen, wieviel Leistung in einem Frequenzintervall (von f bis $f + df$) enthalten ist. In diesem Fall unterscheidet man nicht mehr zwischen den spektralen Anteilen positiver und negativer Frequenzen, sondern nimmt den Frequenzbereich von 0 bis ∞ und definiert das einseitige Leistungsspektrum (*Power Spektrum)* als

$$P_h(f) = |H(f)|^2 + |H(-f)|^2, \quad 0 \leq f \leq \infty \tag{12.16}$$

Ist $h(t)$ reell, wie in unserem Fall, so sind die Anteile positiver und negativer Frequenzen in $H(f)$ gleich, und wir erhalten

$$P_h(f) = 2|H(f)|^2 \tag{12.17}$$

Die Anwendungen der Fouriertransformation sind sehr vielfältig und gehen über das hier präsentierte Maß weit hinaus. Als Einstieg in die Thematik und zur Durchführung des Praktikumsversuches sollen diese Ausführungen jedoch genügen.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie das Frequenzspektrum der Schallintensität eines Knalles in einem Meter Entfernung, wenn der Knall 0,01 s dauert und 10 W Schalleistung hat. Nehmen Sie eine Rechteckfunktion der Schalleistung an.

12.3.1 Die diskrete Fouriertransformation

In vielen Anwendungen, so auch in diesem Praktikumsversuch, wird die Fouriertransformation an einer Funktion, welche nur durch diskrete Datenwerte gegeben ist, durchgeführt. Daten-

[4]Diese Leistung ist eine mathematische Größe. Um eine physikalische Leistung zu erhalten, muß man entsprechend der untersuchten Meßgröße (dem Signal) geeignet umformen.

werte der Funktion $h(t)$ liegen also für die diskreten Zeitpunkte in konstanten Zeitschritten Δt vor:

$$h_n = h(n \cdot \Delta t), \quad \text{für } n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{12.18}$$

Der Kehrwert des Zeitschrittes Δt wird **Abtastrate** (*sampling rate*) genannt. Wird Δt in Sekunden gemessen, so ist die Abtastrate dann die Anzahl der Messungen pro Sekunde.
Für jeden Wert des Zeitschrittes Δt gibt es eine Frequenz f_c, die sogenannte **Nyquist–Frequenz**

$$f_c = \frac{1}{2\Delta t} \tag{12.19}$$

Wenn man nun eine Sinusschwingung der Frequenz f_c mit dem Zeitschritt Δt abtastet, so bekommt man gerade den positiven Maximalwert bei einem Abtastschritt und im nächsten Abtastschritt den negativen Maximalwert (unter der Voraussetzung einer günstigen Phasenlage). *Die Nyquist–Frequenz ist also die maximale Frequenz, welche man bei gegebener Abtastrate noch darstellen kann.*

Wenn nun eine kontinuierliche Funktion $h(t)$ mit den Zeitschritten Δt abgetastet wird und diese Funktion in ihrer *Bandbreite*[5] begrenzt ist und zwar auf Frequenzen, die kleiner sind, als die Nyquist–Frequenz (also $H(f) = 0 \ \forall \ |f| > f_c$), dann ist die Funktion $h(t)$ vollständig durch den Satz diskreter Werte h_n bestimmt. Diesen Satz nennt man das **Abtasttheorem** (*sampling theorem*). Tatsächlich wird $h(t)$ aus den einzelnen Abtastwerten h_n folgendermaßen bestimmt:

$$h(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n \frac{\sin\left(2\pi f_c \left(t - n\Delta t\right)\right)}{\pi \left(t - n\Delta t\right)} \tag{12.20}$$

Das Abtasttheorem ist aus mehreren Gründen beachtenswert. So zeigt es z.B., daß der „Informationsinhalt“ einer in ihrer Bandbreite begrenzten Funktion wesentlich kleiner ist, als derjenige einer allgemeinen kontinuierlichen Funktion mit unbegrenzter Bandbreite. Sehr oft hat man es mit einem Signal zu tun, von welchem man aus physikalischen Gründen annehmen kann, daß die Bandbreite begrenzt (oder annähernd begrenzt) ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn das Signal durch einen Vorverstärker gelaufen ist, welcher eine bekannte begrenzte Bandbreite hat. In diesem Fall besagt das Abtasttheorem, daß wir die Abtastrate mindestens $\Delta t^{-1} = 2f_g$ wählen müssen, also mindestens gleich der doppelten oberen Grenzfrequenz, um zu vermeiden, daß man für ein Signal mit der Frequenz f_g bei ungünstiger Phasenlage in bezug auf die Abtastzeitpunkte gar kein Signal aufzeichnet.

Ist nun eine kontinuierliche Funktion $h(t)$ in ihrer Bandbreite nicht begrenzt, so tragen auch jene Frequenzanteile im Spektrum der Funktion, die außerhalb des Intervalls $-f_c < f < f_c$ liegen, zum Spektrum innerhalb des Intervalls bei, da sie durch die zu kleine Abtastrate in das Frequenzband hinuntergefaltet werden (im Englischen wird dieses Phänomen *aliasing* genannt). Ist eine Funktion (ein Signal) erstmal abgetastet, kann man nichts mehr gegen diesen Effekt unternehmen. Mann kann jedoch das Spektrum auf diesen Effekt hin untersuchen, denn der Grenzwert für $H(f)$ für $f \to f_c$ muß ja 0 sein. Trifft dies nicht zu, dann

[5] Als Bandbreite einer Funktion bezeichnet man jenes Frequenzintervall im Frequenzspektrum der Funktion, welches Amplitudenanteile ungleich Null hat.

sind Beiträge von Frequenzen größer f_c ins Spektrum hineingefaltet und die Aussagekraft des Spektrums ist eingeschränkt oder anders gesagt: *bildet man den Grenzwert $f_c \to \infty$, so darf sich das Spektrum nicht verändern.*

Die numerische Fouriertransformation wird oft mit dem FFT-Algorithmus (*Fast Fourier Transformation*) durchgeführt. Diesen Algorithmus wollen wir hier nicht näher erklären, jedoch wird er im für diesen Praktikumsversuch zur Verfügung stehenden Computerprogramm verwendet. Der FFT-Algorithmus läuft dann besonders schnell, wenn die Anzahl der Abtastpunkte eine Potenz der Zahl 2 ist.

Die gesamte Aufnahmezeit des Signals ist $T = N \cdot \Delta t$ (mit N Anzahl der Abtastpunkte). Nach der diskreten numerischen Fouriertransformation bekommen wir das diskrete Frequenzspektrum als $H_n = H(n \cdot \Delta f)$. Die dazugehörenden Frequenzen f_n sind

$$f_n = \frac{n}{N \cdot \Delta t}, \quad \text{mit } n = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} \tag{12.21}$$

womit sich die Frequenzskala von $-f_c$ bis f_c aufspannt. Die Frequenzauflösung, also die Schrittweite auf der Frequenzskala, beträgt

$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t} = \frac{1}{T} \tag{12.22}$$

Abschließend sein noch angemerkt, daß beim FFT-Algorithmus im allgemeinen N^2 Berechnungen für eine Fourier–Transformation notwendig sind. Wenn jedoch die Anzahl der Abtastpunkte N einer Potenz der Zahl 2 enspricht, reduziert sich die Zahl auf $N \log_2 N$.

12.3.2 Datenfensterfunktionen

Da man nicht unendlich lange Datenströme digital aufzeichnen und dann analysieren kann, muß man aus einem Datenstrom einen Teil herausschneiden, den man letztendlich der Analyse zuführt. Startet man die Aufzeichnung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_1 und beendent sie zu einem späteren Zeitpunkt t_2, so schneidet man aus seinem unendlich langen Datenstrom mittels einer Rechteckfunktion einen Bereich $t_2 - t_1$ heraus. Diese Rechteckfunktion nennt man nun **Fensterfunktion** und es ist klar, daß die Multiplikation des Signals mit einer Fensterfunktion das Ergebnis der Fouriertransformation beeinflussen wird. Die allgemeine Form eine Fouriertransformation unter Verwendung einer Fensterfunktion lautet folgendermaßen:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) w(t - t_0) e^{2\pi i f t} dt \tag{12.23}$$

Die Fensterfunktion $w(t)$ ist nur innerhalb einer gewissen Fensterbreite, welche um den Zeitpunkt t_0 zentriert ist, ungleich 0. Außerhalb ist die Fensterfunktion gleich 0.

Neben der Rechteckfunktion als Fensterfunktion gibt es noch viele weitere Fensterfunktionen, praktisch jede mathematische Funktion, welche in einem gewissen Bereich, der Fensterbreite, von 0 auf 1 und wieder auf 0 geht, hat einen Namen und ist als Fensterfunktion für eine spezielle Anwendung vorteilhaft. Im folgenden sind einige gebräuchliche Fensterfunktionen aufgeführt:

$$
\begin{aligned}
w_j &= 1 - \left| \frac{j - \frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)} \right| && \text{Parzen–Fenster} \\
w_j &= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N-1}\right)\right) && \text{Hanning–Fenster} \\
w_j &= 0,54 - 0,46\cos\left(\frac{2\pi j}{N-1}\right) && \text{Hamming–Fenster} \\
w_j &= 1 - \left(\frac{j - \frac{1}{2}(N-1)}{\frac{1}{2}(N+1)}\right)^2 && \text{Welch–Fenster}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist w_j die diskrete Darstellung der kontinuierlichen Funktion $w(t)$. Die verschiedenen Fensterfunktionen sind in Abbildung 12.4 dargestellt.

Das *Hamming*–Fenster ist dem *Hanning*–Fenster sehr ähnlich, geht jedoch an den Rändern der Fensterbreite nicht exakt auf Null. Mit dem *Welch*–Fenster hat man üblicherweise ein gutes Fenster für sehr viele Anwendungen.

Der wesentliche Effekt dieser Fensterfunktionen im Vergleich zu einem unendlich langen Datenstrom, sind die verminderte Frequenzauflösung und das Übersprechen auf Nachbarkanäle im Frequenzspektrum, das zum Auftreten von Nebenmaxima führt. Für die oben genannten Fensterfunktionen ist dies in Abbildung 12.5 dargestellt. Diese beiden Effekte, das Übersprechen (*amplitude leakage* in Abbildung 12.5) und die Verminderung der Frequenzauflösung (s. die Halbwertsbreiten in Abbildung 12.5), werden durch die Fensterfunktionen wesentlich beeinflußt und sind der Grund für die Vielzahl der existierenden Fensterfunktionen.

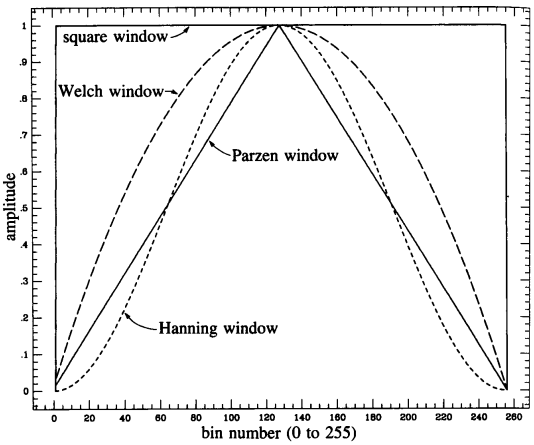


Abbildung 12.4: Fensterfunktionen, welche häufig zur Bestimmung des Leistungsspektrums mit dem FFT–Algorithmus verwendet werden. Die Anzahl der Abtastpunkte ist 256.

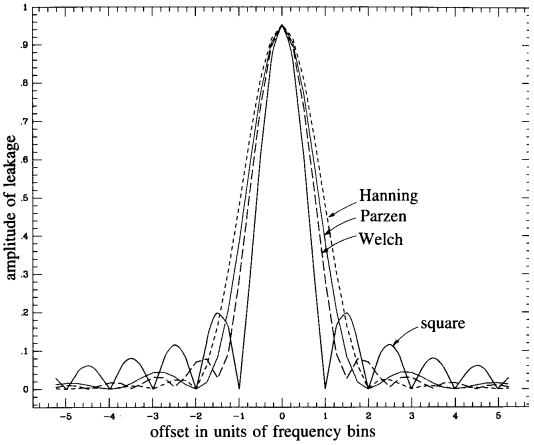


Abbildung 12.5: Übersprechen der nominalen Frequenzlinie (*offset* = 0) auf die Nachbarkanäle im Frequenzspektrum aufgrund verschiedener Datenfenster. Das größte Übersprechen wird für ein Rechteckfenster beobachtet.

12.4 Der Gong

Als Schallquelle dient in diesem Praktikumsversuch ein großer Gong. Hierbei handelt es sich um einen Symphonic Gong von 36" (92 cm) Durchmesser der Firma Paiste (Paiste AG, 6207 Nottwil) - ein ungestimmter flacher Gong mit universalem Klangcharakter. Der Begriff *Symphonic* ist dabei nicht im üblichen Wortsinn – der klassischen Symphonie – sondern im ursprünglichen Sinn des harmonischen Zusammenklingens gemeint.

Der Symphonic- oder Universalgong umfaßt das Gesamtklangspektrum des Gongs überhaupt. In ihm sind eigentlich alle anderen Gongs enthalten. Sein großes dynamisches Volumen kann durch die Art des Anschlags, abhängig von der psychischen und physischen Konstitution des Spielenden, dosiert, verstärkt oder gedämpft werden. Bitte vermeiden Sie es, den Gong anzufassen, da sonst das Metall oxidiert. Durch Variation des Anschlagortes lassen sich besondere Höhen oder Tiefen hervorheben, die im Gesamtklang enthalten sind.

Beim Übergang der Schallschwingungen vom Festkörper, dem Gong, auf die Luft gibt es ein ähnliches Anpassungsproblem des Schallwiderstandes, wie beim menschlichen Ohr. Schall kann nur schwer von einem Festkörper oder einer Flüssigkeit auf Luft übertragen werden. Eine schwingende Saite erregt die Luft nur schwach. Hier muß man die Schwingungsamplitude der Saite über die große Fläche des Resonanzbodens (Violinkörper) verteilen, um eine gute Anpassung zu erzielen. Man kann auch sagen, daß für Wellenlängen in Luft, die alle groß gegenüber dem Durchmesser der Saite sind, sich die Druckunterschiede außen um die Saite herum ausgleichen. Das gleiche gilt für einen Lautsprecher, dessen Membran zu klein ist. Dieser wird keine tiefen Frequenzen abstrahlen können. Die Dimensionen unseres Gongs sind von vergleichbarer Größenordnung, wie die Wellenlänge. Die Schallabstrahlung ist daher gut, wie Sie im Verlauf des Praktikums noch feststellen werden.

12.5 Durchführung der Messungen

12.5.1 Inventarliste

- Gong, ausgerüstet mit verschiedenen Schlägern (wird von allen vier Gruppen gemeinsam verwendet)
- Mikrophon
- Vorverstärker, 2 Kanäle (wird von zwei Gruppen gleichzeitig verwendet)
- Macintosh–Computer
- Phonmeter (wird von allen vier Gruppen gemeinsam verwendet)

12.5.2 Einleitung

Zur Durchführung der Messungen gibt es auf dem Computer ein Programm, welches in drei verschiedene Unterprogramme, das Spielprogramm, das Meßprogramm und das Analyseprogramm, aufgeteilt ist. Alle diese Programme sind in der Programmiersprache *LabView* geschrieben.

Die drei Programme, welche Sie in diesem Praktikum verwenden sollen, sind auf dem Computer im Verzeichnis `Akustik` abgelegt und werden über das Symbol `GONG` in der Fussleiste aufgerufen. Bevor Sie mit dem Auswahlprogramm die anderen Programme aufrufen können, müssen Sie die Namen der Gruppenteilnehmer in das Feld „Versuch wird durchgeführt von“ eingeben. Ihre Namen erscheinen dann auf den Ausdrucken, die Sie von den verschiedenen Programmen aus machen können. Alle Daten, welche Sie während des Praktikums erzeugen, legen Sie bitte im Unterverzeichnis `Akustik/Daten` ab.

12.5.3 Spielprogramm

Beschreibung

Dieses Programm wird zum Ausprobieren des gesamten Versuchsaufbaus gebraucht. Das Programm zeichnet den Ausgang des Mikrophons (die Druckabweichung in Volt) auf und rechnet laufend ein Frequenzspektrum (tatsächlich ein Leistungsspektrum der gemessenen Spannung) aus. Die Abszisse ist schon auf Hertz geeicht.
Die Spannung des Mikrophons wird über einen Vorverstärker verstärkt und digitalisiert an den Computer weitergegeben. Stellen Sie die Verstärkung des Vorverstärkers (Drehknopf *Gain*) so ein, daß Sie das Signal des angeschlagenen Gongs gut auf der Computeranzeige sehen, jedoch der Vorverstärker nicht übersteuert wird. Übersteuern zeigt der Vorverstärker durch

Eingabefeld	**Ausgabefeld**	**Funktion**
`number of samples`		Anzahl der Abtastpunkte, welche für ein Frequenzspektrum genommen werden (Beachten Sie das Abtasttheorem, Default = 8192)
`sample rate`		Abtastrate Δt^{-1} (Beachten Sie das Abtasttheorem)
`window`		Datenfensterfunktion
`display unit`		Meßgröße, welche angezeigt wird
`conversion factor for sound pressure`		Umwandlungsfaktor von den gemessenen Volt in Pa Schalldruck
	`total power in spectrum`	Gesamtleistung des aufgenommenen Spektrums (s. Gleichung 12.15)
	`estimated peak frequency`	Frequenz, bei der die höchste Signalamplitude auftritt
	`selected dB`	Ausgewählte physiologische Hörkurve (s. Abb. 12.2)

Tabelle 12.4: Ein- und Ausgaben, die zur Messung des Frequenzspektrums bereitstehen

`display unit`	**Funktion**
$V_{rms,lin}$	Gemessener Effektivwert der Spannung (in V); rms steht für *root means square* (s. Elektronikvorlesung)
$V_{rms,log}$	Gemessener Effektivwert der Spannung (in dB) bezogen auf 1V
$V_{pk,lin}$	Gemessene Spitzenspannung (in V)
$V_{pk,log}$	Gemessene Spitzenspannung (in dB), bezogen auf 1V
p	Schalldruck (in Pa)
L	Schallintensität in dB (gemäß Definition in Kapitel 12.2)
p_L	Schalldruck (in Pa) gewichtet mit der physiologischen Empfindlichkeit des Ohres (s. Abb. 12.2)
L_L	Lautstärke (in Phon) gewichtet mit der physiologischen Empfindlichkeit des Ohres (s. Abb. 12.2)

Tabelle 12.5: Einstellung des Feldes `display unit`

das Aufleuchten einer roten Leuchtdiode (*Clip*) auf seiner Frontplatte beim entsprechenden Kanal an. Beachten Sie außerdem, daß die *PAD*–Taste nicht gedrückt ist. Diese Taste bewirkt eine Reduktion der Verstärkung des Vorverstärkers um 15dB. Der Vorverstärker hat zwei unabhängige Kanäle, wobei jede der zwei Gruppen, die sich einen Vorverstärker teilen, jeweils einen verwendet.
In Tabelle 12.4 sind die Ein- und Ausgaben aufgeführt, die zur Messung des Frequenzspektrums zur Verfügung stehen.
Manche dieser Felder werden nur unter bestimmten Betriebsbedingungen bedient. Sind die Felder inaktiv, so werden sie auf dem Bildschirm grau dargestellt. Die Einstellungsmöglichkeiten für das Feld `display unit` sind in Tabelle 12.5 zu finden.

Durchführung

- Positionieren Sie Ihr Mikrophon in einer sinnvollen Distanz zum Gong bzw. zur Wand. Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen dazu.

- Bestimmen Sie den „`Conversion factor for sound pressure`“ durch Vergleich der Anzeige des Phonmeters und der Anzeige „`Total power in spectrum`“ auf dem Bildschirm. Geben Sie diesen Faktor in das ensprechende Feld ein.

- Probieren Sie die verschiedenen Schläger sowie verschiedene Anschlagarten und Anschlagorte auf dem Gong aus. Versuchen Sie zu einem Routineanschlag zu kommen, der Ihnen gefällt und den Sie für die weiteren Analysen verwenden wollen. Versuchen Sie bestimmte Klangeffekte (Klangfarbe, Klanghöhe, Schwebung, Modulation, etc.) aufgrund Ihrer persönlichen Hörempfindung und der gleichzeitig gemessenen Frequenzspektren zu erkennen, welche Sie bei der nachfolgenden Auswertung dann untersuchen wollen. Dokumentieren Sie Ihre Wahl der Klangeffekte, die Sie näher untersuchen wollen.

- Vergleichen Sie Ihre Hörempfindung mit dem dargestellten Spektrum. Wählen Sie nun das physiologische Filter aus (p_L oder L_L in „`display unit`“) und beobachten Sie, ob

die Übereinstimmung der Messung mit Ihrer persönlichen Wahrnehmung nun größer ist.

- Bestimmen Sie, welche Signalbandbreite (tiefste und höchste Frequenz) sich für Ihren speziellen Anschlag ergibt. Bestimmen Sie die Zeitdauer, bis der Gong abgeklungen ist. Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen hierzu und auch wann Sie den Klang des Gongs für abgeklungen halten.
- Wenn Sie genug Zeit haben, singen Sie verschiedene Vokale auf der gleichen Tonhöhe und beobachten Sie die Obertöne im Frequenzspektrum. Wiederholen Sie diesen Versuch für verschiedene Tonhöhen.

Weiterhin bietet Ihnen das Spielprogramm noch die Möglichkeit, Ihre Daten in einer 3-dimensionalen Form darzustellen, wobei die Signalamplitude als Funktion von Frequenz und Zeit dargestellt wird. Diese Darstellung können Sie über die Knöpfe „`Sonagram`“ oder „`Waterfall`“ auswählen. Bevor Sie dieses Modul auswählen, muß jedoch der Gong bereits angeschlagen sein, da die Skalierung der Graphik automatisch bei Laden des Moduls und dem zu der Zeit verfügbaren Signal erfolgt.

12.5.4 Messprogramm

Nehmen Sie nun einige der Schallsignale auf und speichern Sie sie für die nachfolgende Analyse. Als Abtastrate (s^{-1}) wird eine Zweierpotenz (8192) empfohlen.

12.5.5 Analyseprogramm

Beschreibung

Mit dem Analyseprogramm führen Sie eine detailierte Analyse der Zeitreihe, welche Sie mit dem Meßprogramm aufgenommen haben, durch. Sie wissen durch Ihre Beobachtung mittlerweile, daß sich der Klang des Gongs mit der Zeit ändert. Es macht also keinen Sinn, eine Fouriertransformation des ganzen Datensatzes durchzuführen, denn so würden Sie die Informationen über die zeitliche Veränderungen einzelner Frequenzanteile verlieren.
Wendet man die Fouriertransformation nun nicht auf den ganzen Datensatz auf einmal an, sondern transformiert nur Teilstücke des Datensatzes, so bekommt man sowohl die Frequenzinformation des Klanges zu einem gewissen Zeitpunkt, als auch dessen zeitliche Entwicklung. Ein Datenfenster definierter Breite, welches die Daten für die FFT ausschneidet, wird in Schritten über den Datensatz gezogen. In der Literatur ist dieses Verfahren unter dem Namen *Short-time Fourier Transformation spectrogram* (STFT) bekannt. Es ist die wahrscheinlich häufigste Methode, um sowohl die Frequenzinformationen, als auch die zeitliche Entwicklung der Frequenzanteile zu untersuchen. Das STFT zum Zeitpunkt i berechnet sich als

$$STFT(i,k) = \left\{ \sum_{m=-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}-1} h_{i-m} w_m e^{-i\frac{2\pi}{L}mk} \right\}^2 \tag{12.24}$$

mit den Datenpunkten h_m, der Fensterfunktion w_m, der Länge des Teilstücks L und dem Index der Frequenz k.
In Tabelle 12.6 sind die Eingaben zusammengestellt, die zur Auswertung eines Datensatzes benötigt werden. Beachten Sie, daß das Analyseprogramm Ihnen zunächst einen Vorschlag für diese Parameter macht.

Eingabeparameter	Ausgabeparameter	Funktion dieser Variablen
	`sampling frequency`	Abtastrate A_s (in s^{-1}); Wert von der Datenaufnahme übernommen.
	`samples`	Gesamtzahl der aufgenommenen Datenpunkte (Abtastrate × Gesamtdauer); Wert von Datenaufnahme übernommen.
`Window Selector`		Auswahl des Datenfensters (s. Abbildung 12.4).
`Window Length`		Wl bestimmt die Frequenzauflösung im Spektrogramm: Es wird eine FFT gebildet über die Dauer von Wl/A_s Sekunden.
`Time Interval`		Ti ist die Anzahl der Datenpunkte in der Zeitreihe, welche einen Zeitschritt ausmachen; die Zeitauflösung im Spektrogramm ist Ti/A_s. Es wird ein ganzzahliges Vielfaches der Abtastrate und $Ti = Wl$ empfohlen.
`Maximum Frequency`		Maximale Frequenz, welche im Spektrogramm angezeigt wird.

Tabelle 12.6: Eingaben, die zur Auswertung eines Datensatzes benötigt werden.

Verringern von „`Time Interval`“ und „`Window Length`“ erhöht die Zeitauflösung, verringert aber die Frequenzauflösung der einzelnen Spektrogramme.

Zuerst müssen Sie dem Analyseprogramm den Namen der Eingabedatei (jene Datei, welche Sie mit dem Meßprogramm aufgenommen haben) mitteilen, indem Sie den entsprechenden Knopf auf der Benutzeroberfläche drücken. Sind Ihre Daten geladen, können Sie Ihre Einstellungen für die Datenanlyse vornehmen (s. Tab. 12.6) oder zunächst einmal die vom Computer vorgeschlagenen Werte verwenden. Die bei der Datenaufnahme eingestellten Parameter werden automatisch von diesem Programm übernommen. Durch Drücken des Knopfes „`Calc`“ wird die Auswertung Ihrer Daten gestartet.

Als Resultat der Analyse erhält man zwei Graphiken, das Spektrogramm und das Frequenzspektrum zum Zeitintervall, wo der Cursor im Spektrogramm liegt (s. Abb. 12.6). Durch Bewegen des Cursors können Sie verschiedene Frequenzspektren anzeigen. Das Frequenzspektrum ist das gleiche, wie das, welches schon im Spielprogramm zur Verfügung stand und dient hier zur Kontrolle, daß der Datentransfer auch problemlos vonstatten gegangen ist. Sind Sie mit dem Resultat der Auswertung nicht zufrieden, drücken Sie den Knopf „`end display`“, womit Sie wieder in den Eingabemodus zurückkommen und neue Einstellungen für die Auswertung tätigen können. Auch zum Verlassen des Auswerteprogramms müssen Sie zuerst den Knopf „`end display`“ drücken.

Das Spektrogramm ist eine 3-dimensionale Darstellung der Daten (s. Abb. 12.6 oben). Auf

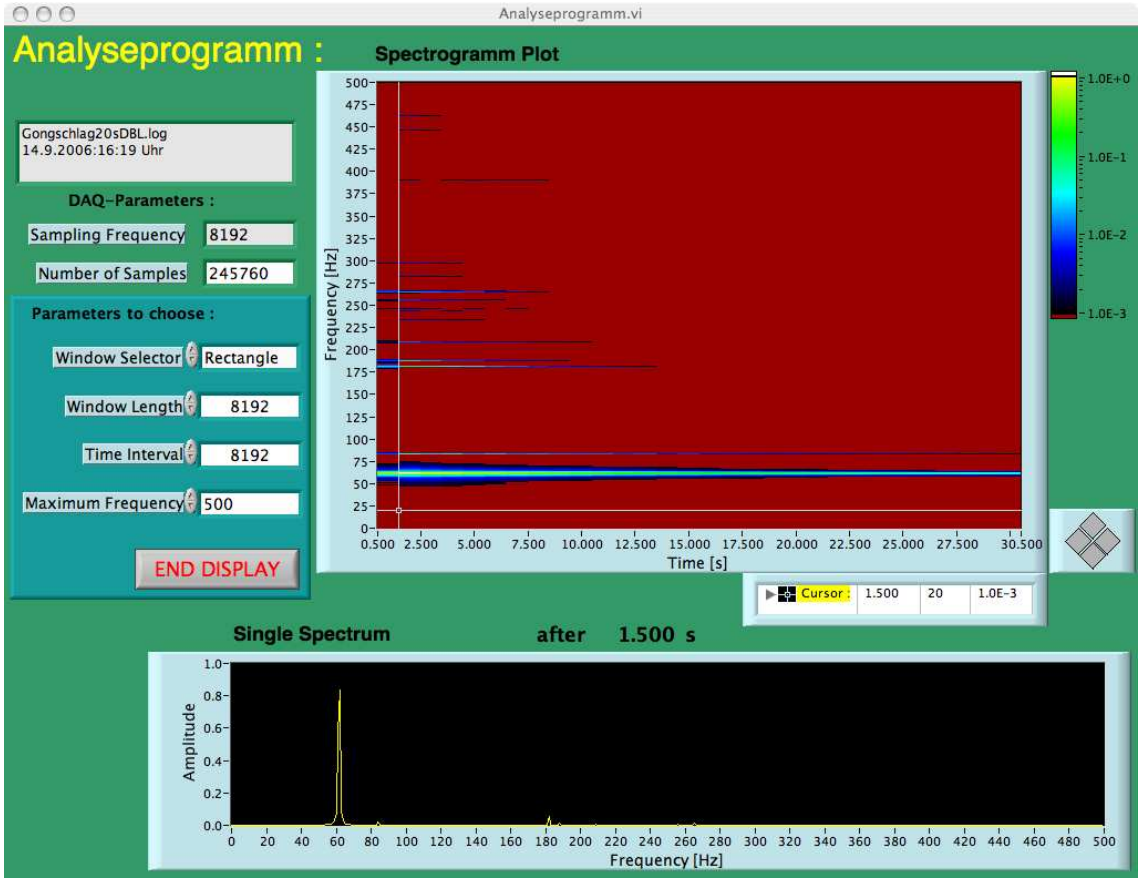


Abbildung 12.6: Dreidimensionales Spektrogramm (oben) und Spektrum zu einem bestimmten Zeitpunkt (unten) eines Gongklanges. Ihr Spektrogramm kann sehr verschieden von dem hier abgebildeten sein, je nach gewählter Anschlagart, Anschlagort und Schläger. Die dünnen weißen Linien sind das Fadenkreuz, mit welchem Sie Datenwerte aus dem Spektrogramm auslesen können.

der Abszisse sind die Zeitschritte aufgetragen zu welchen eine Frequenzanalyse durchgeführt wurde, auf der Ordinate ist die Frequenz aufgetragen. Die Farbkodierung im Spektrogramm gibt nun Auskunft über die Leistung des Signals bei einer bestimmten Frequenz und zu einem bestimmten Zeitpunkt. Beachten Sie, daß die Amplituden sowohl im Spektrogramm als auch im Frequenzspektrum normiert sind, so daß das größte Signal die Amplitude 1 aufweist.

Durchführung

- Probieren Sie verschiedene Längen der Einzelspektren aus, bis dieser Parameter optimal in bezug auf Zeit- und Frequenzauflösung ist.
- Testen Sie verschiedene Fensterfunktionen und Fensterbreiten, bis diese Parameter optimal für die Frequenzauflösung sind. Beobachten Sie hierbei genau den Effekt dieser Parameter auf die Frequenzauflösung (Breite der Peaks im Spektrum 12.6).
- Wählen Sie nun ein paar Frequenzen aus dem Spektrogramm aus, welche interessant erscheinen und die Sie später näher untersuchen wollen (ebenso die Grundfrequenz berück-

sichtigen). Berücksichtigen Sie die oben erwähnten Effekte bei der Auswahl der einzelnen Frequenzen.

12.5.6 Detailierte Auswertung

Beschreibung

Indem Sie nun im Analyseprogramm den Knopf „`large graph`“ drücken, können Sie nun die einzelnen Spektren zu den verschiedenen Zeitpunkten genau ausmessen. Die Signalintensitäten bei den ausgewählten Frequenzen bestimmen Sie mit dem Cursor im Frequenzspektrum, wobei Sie die jeweiligen Werte im Fenster unterhalb der Graphik genau ablesen können. Dies ist für alle Zeitschritte und alle ausgewählten Frequenzen durchzuführen. Als Minimum der Auswertung tragen Sie für vier Frequenzen die Zeitabhängigkeit innerhalb des aufgenommenen Meßintervalls auf. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Durchführung

- Messen Sie die Intensitäten für alle von Ihnen gewählten Frequenzen und für alle aufgenommenen Zeitschritte aus (im Fenster „`large graph`“).
- Zeichnen Sie den Intensitätsverlauf der einzelnen Frequenzen in Abhängigkeit von der Zeit auf. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse. Bedenken Sie, daß es beim Gong keine zwei gleichen Klänge gibt, d.h. Ihre Ergebnisse werden somit auch zu denen anderer Gruppen verschieden sein.
- Bestimmen Sie die Güte $G = 2\pi$ (*Energie/Energieverlust pro Periode*) bei den verschiedenen Frequenzen.
- Vergleichen Sie die Frequenzunschärfe bedingt durch die Güte ($G = \omega_0/\Delta\omega$) mit der Frequenzunschärfe der numerischen Fouriertransformation.

Literaturverzeichnis

[1] Press, W.H., B.N. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Letterling (1986): *Numerical Recipes* (Cambridge University Press).
Bibliothek ExWi: KRA 111

[2] Rossing, T.D. (1990): *Science of Sound* (Addison Wesley).
Bibliothek ExWi: TFZ 202

[3] Kinsler, H.E., A.R. Frey, A.B. Coppens, J.V. Saudes (1982): *Fundamentals of Acoustics* (John Wiley).

[4] Stork, D.G. (1982): *The Physics of Sound* (Prentice Hall Inc.).

[5] Boas, Mary L.: *Mathematical Methods in the Physical Sciences* (John Wiley & Sons).
Bibliothek ExWi: MCA 159

Abbildungsverzeichnis

2.1 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung: Erste Näherung nach Taylor 23

3.1 Zusammenfassung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen 39
3.2 Graphische Darstellungen zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen 43

4.1 Skizze des Versuchsaufbaus 48
4.2 Schema und Symboltabelle 49
4.3 Versuchsanordnung 52

5.1 Einfachstes Schaltschema einer Photoröhre 58
5.2 Effektives Schaltschema 60

6.1 Geiger-Müller-Zählrohr 67
6.2 Charakteristik eines Geiger–Müller–Zählrohrs 67
6.3 Auszüge aus der Isotopentabelle 69
6.4 Massenabsorptionskoeffizient von Blei 70

7.1 Kondensator 80
7.2 Vierpol 82
7.3 Einfachster Tiefpaß 83
7.4 Bode–Diagramm des Tiefpasses für $RC = 10^{-5}$s 84
7.5 Einfachster Hochpaß 86
7.6 Bode–Diagramm des Hochpasses für $RC = 10^{-5}$s 87
7.7 Einfacher Bandpaß 88
7.8 Bode–Diagramm des Bandpasses 90
7.9 Parallelschwingkreis 91
7.10 Bode–Diagramm des Parallelschwingkreises 92

8.1 Blockschaltbild für Elektronik II 105
8.2 Übersicht über Dioden 106
8.3 Strom-Spannungskennlinie einer Diode 106
8.4 Übersicht über npn– und pnp–Transistoren 107
8.5 Typische Kennlinien eines PNP-Transistors in Emitterschaltung. 108
8.6 Prinzipschaltbild eines Operationsverstärkers 109
8.7 Schaltung des Invertierenden Verstärkers 110
8.8 Prinzipschaltung eines Logarithmierers 111
8.9 Tatsächliche Logarithmiererschaltung. 111
8.10 Testschaltung für den Operationsverstärker. 112

8.11 Kennlinie des Logarithmierers . . . 113
8.12 Spitzenwertgleichrichter . . . 114

9.1 Hysteresisschleifen der Magnetisierung . . . 120
9.2 Schaltung zur entmagnetisierung der Ringkerne . . . 122
9.3 Messschaltung für den Magnetisierungszyklus . . . 123
9.4 Details der Schaltung und der äusseren Zusatzelemente des Integrators. . . . 124
9.5 Typisches Messergebnis . . . 124
9.6 Innenleben der Ringkerne . . . 125

10.1 Front Panel von TankSimulation.vi . . . 133
10.2 Block Diagram von TankSimulation.vi . . . 134
10.3 Controls Palette . . . 135
10.4 Front Panel: Ein- und Ausgabe . . . 136
10.5 Tools Palette . . . 136
10.6 Die Functions Palette . . . 137
10.7 Block Diagram: Zufallszahlen . . . 137
10.8 Kontinuierliche Zufallszahlen . . . 138
10.9 Kontinuierliche Zufallszahlen graphische Ausgabe . . . 139
10.10Kontinuierliche Zufallszahlen graphische Ausgabe . . . 140
10.11Kontinuierliche Zufallszahlen mit While-Loop . . . 141
10.12Mittelwert und Standardabweichung . . . 142
10.13Histogramm . . . 143
10.14Histogramm . . . 144
10.15Immediate Nonbuffered Acquisition . . . 145
10.16Timed Buffered Acquisition . . . 146
10.17Timed Buffered Acquisition . . . 147
10.18Versuchsaufbau Pulsmessung . . . 148
10.19Puls.vi 1. Bild . . . 149
10.20Puls.vi 2. Bild . . . 150

11.1 Licht und Schatten hinter einer Spaltblende. . . . 157
11.2 Beugungsparmeter . . . 158
11.3 Skizze für einige Lichtwege hinter dem Einfachspalt . . . 159
11.4 Geometrie eines Dreifachspaltes . . . 161
11.5 Beugungsmuster eines Dreifachspaltes . . . 162
11.6 Photographie der Versuchsanordnung . . . 163
11.7 Hauptmenu des Fraunhofer-Programms . . . 166
11.8 Einstellungen . . . 167
11.9 Messen/Speichern . . . 168
11.10Skalieren/Drucken . . . 169
11.11Klassische Formel . . . 170

12.1 Sägezahnschwingung . . . 179
12.2 Lautstärkekurven . . . 183
12.3 Das menschliche Ohr . . . 184
12.4 Fensterfunktionen . . . 189
12.5 Übersprechen auf Nachbarkanäle im Frequenzspektrum . . . 189

12.6 Spektrogramm eines Gongklanges 195